TÉCNICA

Revista de Engenharia

Publicação trimestral

de investigação científica e desenvolvimento

nº3-4/97 ISSN 0040-1714 Janeiro 98

Homenagem ao Professor

António da Silveira

Na EPSON, mesmo nos intervalos, a investigação nunca pára...

Pedro, Joyce e toda a equipa de I&D (Investigação e Desenvolvimento) estão seguros de um facto muito simples: o seu talento criativo não se desliga quando chegam as 7 da tarde. Por isso é que eles nunca param realmente, mesmo quando não estão a trabalhar. Continuam sempre em busca de melhores formas de responder às suas necessidades pessoais e profissionais, para serem os primeiros a apresentar as soluções que procura – como as impressoras de jacto de tinta, baseadas numa tecnologia exclusiva da EPSON, capazes de imprimir fotografias com uma resolução de 1440 ppp, ou os videoprojectores ultrabrilhantes e ultracompactos. Os nossos engenheiros investigam, esmiuçam e insistem sem parar... conseguindo sempre soluções novas! Tudo para que você possa usufruir das condições de trabalho que sempre sonhou ou que nunca pensou serem possíveis. Mesmo a mascar a sua pastilha elástica, Pedro não resiste à tentação de verificar a qualidade do *transfer* e de tentar descobrir a razão porque a tinta não adere tão bem como deveria. São estes pormenores que explicam como é que 49 unidades fabris e comerciais EPSON, em todo o mundo, possuem as certificações de qualidade ISO 90001 / 90002. De facto, todos os nossos técnicos de I&D sabem que no dia em que chegarem ao escritório só para trabalhar, esse será certamente o seu último dia! Porque deveriam eles parar? Consegue dar-nos uma boa razão para pararmos?

Para saber mais sobre as especificações e produtos Seiko EPSON, por favor preencha o cupão e remeta-o para : EPSON PORTUGAL, S.A. – Rua Prof. Francisco Gentil 6 A/B – Telheiras Sul – 1600 LISBOA ou consulte o *site* da EPSON PORTUGAL em www.epson.pt

EPSON: VOCÊ VAI ADORAR AS NOSSAS OBSESSÕES

nome : _____

empresa : _____

endereço : _____

telef. _____ fax: _____ E-mail: _____

Por favor, enviem-me mais informações sobre os produtos EP

EPSON

SEIKO EPSON CORPORATIO

Seiko EPSON Corp. 335 Owa Suwa Shi. Nagano Ken 392. JAPAN

Qualquer semelhança com um centro de investigação EPSON, é pura coincidência

índice

Editorial 3
II Parte – Os Métodos da Estatística Clássica
Prof. António da Silveira 5
III Parte – Equilíbrio do radiamento
Prof. António da Silveira 21
IV Parte – os Novos métodos de Estatística
Prof. António da Silveira 55
Cerimónia de Homenagem ao Professor António da Silveira
Prof. Doutor Diamantino Durão 65
Homenagem ao Professor António da Silveira
Prof. Doutor Manuel José de Abreu Faro 67
O Professor António da Silveira
Prof. Doutor Alves Marques 71

FICHA TÉCNICA:

TÉCNICA, Revista de Engenharia
Publicação trimestral - p.v.p. 600$00
distribuição gratuita aos sócios da AEIST e aos docentes do IST
ISSN 0040-1714
Depósito legal 85 962/95
Registo de Imprensa 101407

Propriedade
Associação dos Estudantes do Instituto Superior Técnico
Av. Rovisco Pais, P – 1000 Lisboa, Portugal
Contrib. N.º 501 055 606

Administração, Serviços Comerciais e Assinaturas
Av. Rovisco Pais, P - 1000 Lisboa, Portugal
Telef: 351 -1- 848 10 18/841 74 10
Fax: 351 -1- 847 40 14/849 92 47
Correio Electrónico – aeistdoc © eta.ist.utl.pl

Direcção
Director Científico: Manuel Abreu Faro
Director Executivo: Nuno Catarino
Vogal: João Silva
Secretariado e Produção: Paula Carvalho

Concepção Gráfica
Traça Design
Praça da Alegria, 6 - 2.º Esq. – 1200 Lisboa
Telef: (01) 343 13 21
Fax: (01) 343 13 24

Publicidade
Dossier Comunicação e Imagens, Lda.
R. Eça de Queirós, 18 – 2.º Lisboa
Telef: (01) 355 92 94/5 – 353 73 21
Fax / Telef: (01) 353 73 16

Execução Gráfica
Gráfica Maiadouro, S.A.
VERMOIM – 4470 Maia
Telef. (02) 943 97 10
Fax: (02) 943 97 18
Delegação em Lisboa
Telef. (01) 799 41 20
Fax: (01) 796 92 79
Tiragem: 5000 ex.

Apoio
Conselho Directivo do Instituto Superior Técnico

TÉCNICA
Revista de Engenharia
Publicação trimestral
de investigação científica e desenvolvimento

Aqui poderia estar um anúncio seu.

Para mais informações contacte-nos pelos telefs.: (01) 355 92 94/5 - 353 73 21 – Fax/Telef.: (01) 353 73 16
ou escreva-nos para: DOSSIER, comunicação e imagem, Lda., R. Eça de Queirós, 18-2.° – 1000 LISBOA

EDITORIAL

No dia 13 de Novembro de 1997, no Anfiteatro de Física do Instituto Superior Técnico, com a presença de sua Excelência o Ministro da Educação, do Magnífico Reitor da Universidade Técnica de Lisboa e do Senhor Presidente do Instituto Superior Técnico, decorreu uma cerimónia de homenagem ao Professor António da Silveira.

Presentes, professores, investigadores, muitos deles antigos alunos e ainda outros que por conhecimento, admiração e amizade acorreram a esta justa e oportuna iniciativa. Presentes ainda, dois filhos do Professor António da Silveira.

No fim da cerimónia, um deles, Professor Doutor Rui da Silveira agradeceu e deu ainda testemunho claro e vivido de quem era seu Pai: um homem permanentemente dedicado ao estudo, no silêncio do seu escritório, no Técnico, nas aulas e convívio com os seus colaboradores e de igual modo no Instituto de Física e Matemática.

A TÉCNICA dedica este número ao Professor António da Silveira e o melhor modo de o fazer é publicar as intervenções dos diversos oradores e ainda completar a publicação dos artigos sobre:

Estrutura da Luz-Hipótese dos Quanta-Métodos da Estatística, por António da Silveira, Professor do Instituto Superior Técnico. Artigos estes, publicados em "Técnicas" de um passado já distante onde, então, à clareza e sobriedade de trato se juntava a modernidade das matérias tratadas.

Assim, este número é integralmente dedicado ao Professor António da Silveira.

Antigo aluno do Professor António da Silveira, colega no I.S.T., com ele na Academia das Ciências de Lisboa, trabalhando ainda e em colaboração no I.A.C., junto-me, promovendo esta publicação na Técnica, aos muitos e são muitos, que admiram e reconhecem o valor e obra do Professor de Física do Instituto Superior Técnico, António da Silveira.

Lisboa, 13 de Novembro de 1997

aeist

Associação dos Estudantes do
Instituto Superior Técnico

Secção de Folhas

Somos especialistas em fotocópias de qualidade!

Fotocópias a cores e a preto.

Encadernações e plastificações.

Impressão rápida e entrega imediata.

Temos os melhores preços do mercado!

Contacte-nos!

Av. Rovisco Pais
1000 Lisboa

Tel.: 848 08 80
Fax: 848 40 14

II PARTE
OS MÉTODOS DA ESTATÍSTICA CLÁSSICA

Prof. António da Silveira

Os métodos da mecânica estatística permitem fazer uma descriminação entre a hipótese ondulatória contínua e a hipótese corpuscular discontínua; permitem calcular as fluctuações da energia média do radiamento e o resultado dêste cálculo sublinha fortemente como veremos a necessidade duma síntese entre a concepção ondulatória e a concepção corpuscular.

Êstes métodos modificaram-se recentemente: ao lado da estatística clássica (individualística) de Boltzmann-Gibbs temos duas novas estatísticas quânticas (colectivísticas), uma do tipo simétrico de Bose-Einstein e outro do tipo antisimétrico chamada de Fermi-Pauli-Dirac. Vamos apresentá-los duma maneira tão geral quanto possível sem recorrer à Mecânica ondulatória e mostrar que sob qualquer das três formas os métodos caminham paralelamente à termodinâmica, mas correspondem a definições diferentes da *probabilidade* dum estado determinado dum sistema. E veremos como a aplicação dêstes métodos nos permite penetrar profundamente no conhecimento da estructura do radiamento.

Quando pretendemos representar todos os estados possíveis que um sistema dado é susceptível de tomar, podemos proceder de duas maneiras diferentes.

1.ª) Podemos imaginar um grande número, *um conjunto,* de sistemas todos perfeitamente idênticos, que sejam por assim dizer *cópias* do sistema de que se trata, e que apresentem *num mesmo instante* todos os estados dêste sistema que importa considerar. Êstes estados podem formar uma sucessão contínua, em que cada um difere infinitamente pouco do precedente e do seguinte, ou formar uma sucessão discontínua, um conjunto numerável. No primeiro caso os estados podem apresentar todos os valores imagináveis da energia, como é o caso dos conjuntos *canónicos* de Gibbs, ou apresentar uma menor variedade, como nos conjuntos *microcanónicos* também de Gibbs, equivalentes de resto aos conjuntos *ergódicos* de Boltzmann. Nêstes últimos os sistemas supõem-se possuir todos a mesma energia E a menos dE.

2.ª) Podemos também fixar a nossa atenção sôbre o conjunto formado pela *sucessão* no tempo, dos diferentes estados do sistema considerado. É o método de Einstein.

A êstes dois pontos de vista correspondem duas maneiras diferentes de definir a probabilidade dum estado determinado dum sistema; no primeiro a probabilidade pode ser definida pelo domínio de extensão em fase Ω que corresponde a êsse estado, no segundo pelo intervalo de tempo θ durante o qual êle persiste nesse estado.

Êstes dois métodos são equivalentes, mas nós utilizaremos o primeiro.

Por sistema entenderemos diversas coisas. Poderá ser um átomo ou uma molécula dum gás; um conjunto de moléculas, por exemplo uma parte dum

gás, dum líquido ou dum sólido; um recinto ou recintos cheio de radiamento; um conjunto de quanta de freqüência determinada; um conjunto de átomos e de quanta de radiamento, etc.

O que vai caracterizar cada um dêstes conjuntos é, por um lado, a perfeita identidade dos sistemas físicos que os compõem, e, por outro lado, o facto que cada um dêles é susceptível de assumir diferentes *estados*.

Do ponto de vista da mecânica clássica se o sistema pode ser tratado como hamiltoniano e com n graus de liberdade, cada um dos seus estados será definido pelos valores de n coordenadas Q_α e dos η momentos canònicamente conjugados P_α.

Se concebermos então um espaço generalizado a $2n$ dimensões no qual as $2n$ variáveis

$$(Q_\alpha, P_\alpha) \quad \alpha = 1, 2, \ldots$$

sejam coordenadas ortogonais poderemos representar simbolicamente cada *estado* ou cada *fase* por um ponto de coordenadas (Q_α, P_α) nêste espaço, que se chama *espaço representativo* ou *espaço das fases*.

No decorrer do tempo o sistema passa por uma *sucessão* de estados que habitualmente é considerada *contínua;* o ponto de fase descreve uma trajectória *contínua* numa *extensão em fase* e o seu movimento é regido pelas equações canónicas de Hamilton.

Do ponto de vista da teoria dos quanta os diferentes estados internos que o sistema (átomo, molécula, etc.) pode assumir formam uma *sucessão discontínua,* um conjunto numerável a uma ou mais variáveis.

Sejam

$$\Sigma_0, \ \Sigma_1, \ldots \ \Sigma_\alpha \ldots$$

êsses diferentes estados e

$$E_0, \ E_1, \ldots \ E_\alpha \tag{64}$$

as correspondentes energias internas.

A experiência mostra que o átomo ou molécula pode persistir num ou noutro dêstes estados, pelo menos durante um tempo apreciável sem perder energia. São os chamados *estados quânticos*.

No caso do átomo de hidrogénio os diferentes estados quânticos correspondem às diferentes órbitras que o electrão periférico pode descrever em tôrno do núcleo e são definidos pelos valores inteiros sucessivos de três *números quânticos* n_1, n_2, n_3. O primeiro determina a grandeza, o segundo a excentricidade e o terceiro a orientação da trajectória do electrão. Mas a análise da estructura dos espectros atómicos com base na teoria de Bohr revelou êste facto que a cada terno de números quânticos correspondem *dois* estados energéticos de energias ligeiramente diferentes formando uma espécie de *dublete*. Pauling conseguiu interpretar formalmente êste desdobramento associando a cada terno de números quânticos n_1, n_2, n_3, que correspondem aos três graus de liberdade usualmente atribuídos a um electrão, um quarto número quântico *s*, que só pode assumir os dois valores $+\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$.

Pauling e Goudsmith sugeriram em seguida uma interpretação física dêste quarto número quântico; mostraram que $\frac{sh}{2\pi}$ é o momentum angular do electrão em tôrno do seu eixo próprio. Êste eixo pode tomar duas orientações opostas que dependem das condições que determinam o carácter do seu movimento de translacção.

Temos pois quatro números quânticos para o electrão periférico do átomo de hidrogénio e quatro números quânticos por cada electrão dum átomo mais complexo, pelo menos alcalino.

Cada índice em (64) representa o grupo de número quânticos associado ao respectivo estado. Por exemplo α representara o grupo de números quânticos n_1^α, n_2^α, n_3^α, s^α.

Num sistema mais complicado, como por exemplo, numa molécula de ácido clorídico, temos diferentes estados quânticos correspondentes às diferentes velocidades de rotação de conjunto da molécula, e às diferentes velocidades de oscilação dos dois núcleos ao longo da linha dos seus centros. Finalmente num caso limite podemos ainda considerar as diferentes formas isoméricas ou tautoméricas duma molécula orgânica como estados quânticos diferentes, por exemplo o álcool propílico e isopropílico ou as formas enólica e cetónica do éter acetil-acético.

Qualquer que seja porém o ponto de vista em que nos coloquemos teremos sempre uma sucessão de estados de energia, discontínua e numerável do ponto de vista quântico, contínua do ponto de vista clássico; mas nós consideraremos êste último caso como o limite do primeiro quando os níveis energéticos se aproximam indefinidamente uns dos outros. São os casos de *degenerescência*, como mostrarei, que permitem fazer a transição.

Sucessão discontínua de estados de energia

Começarei por considerar uma sucessão *discontínua* de estados quânticos de energia.

O problema fundamental das teorias estatísticas é o seguinte: *dado um sistema físico (átomo, molécula, etc.) em equilíbrio térmico à temperatura T, e susceptível de permanecer, pelo menos durante um intervalo de tempo apreciável, em estados quânticos de energia*

$$E_o,\ E_1, \ldots\ E_\alpha \ldots \tag{65}$$

qual é a probabilidade de êle se achar num dado nível energético E_α?

Êste problema equivale evidentemente a est'outro:

Dado um grande número de sistemas físicos independentes (átomos, moléculas, etc.) idênticos e susceptíveis cada um dêles dos níveis energéticos (65) qual é o número provável dos que, em equilíbrio térmico à temperatura T, se acham no estado quântico de energia E_α?

Seja dado um grande número N de sistemas idênticos ao sistema considerado, em equilíbrio térmico, e suponhamos estes sistemas sem interacção uns sôbre os outros. De início podemos supor os sistemas do conjunto repartidos duma maneira qualquer pelos diferentes estados energéticos, e uma dada distribuição de energia total E será caracterizada pelos números.

$$N_o,\ N_1, \ldots\ N_\alpha \ldots \tag{66}$$

de sistemas que se acham respectivamente nos níveis energéticos

$$E_o,\ E_1, \ldots\ E_\alpha \ldots$$

com as condições evidentes:

$$N = \sum_\alpha N_\alpha, \qquad U = \sum_\alpha N_\alpha E_\alpha. \tag{67}$$

Para obtermos a probabilidade, ou pêso estatístico Π desta distribuïção, vamos admitir que *a cada um dos estados de energia Σ_α corresponde uma igual probabilidade "à priori" de persistência dum sistema nesse estado.* É uma hipótese fundamental que, como sempre, só encontrará a sua completa justificação no acôrdo das suas conseqüências com os factos experimentais. Os diversos modos de estatística virão de resto precisar esta noção de probabilidade "à priori".

Para concretizar adoptaremos o seguinte esquema: assimilaremos os estados de energia a células nas quais introduziremos bolas numeradas que representam os sistemas. Primeiro raciocinaremos como se energias E_α fôssem todas distintas umas das outras (sistemas não degenerados); em seguida consideraremos os casos em que a diferentes estados corresponde uma mesma energia E_α (sistemas degenerados). Êstes estados não possuem evidentemente a mesma probabilidade "à priori" que os primeiros.

Podemos de resto fazer entrar os casos de degenerescência no caso geral da maneira seguinte: se o estado Σ_α fôr múltiplo fá-lo-hemos figurar tantas vezes quantos forem os estados nêle confundidos; por exemplo se fôr g_α *o* factor de multiplicidade (pêso, ou grau degenerescência) do estado Σ_α fá-lo-hemos figurar g_α vezes.

Na mecânica ondulatória g_α representa o número e funções de onda independentes associadas ao nível energético α.

Dada então uma distribuïção, ou estado macroscópico, (66) qualquer esta poderá em geral ser realizada dum certo número de maneiras diferentes, *complexões* ou estados microscópicos e, por convenção, a probabilidade, ou, o pêso estatístico, desta distribuïção, ou estado macroscópico é proporcional ao número de complexões ou estados microscópicos que a realizam.

Os diferentes métodos de estatística distinguem se na maneira de avaliar o número de complexões.

A estatística de Boltzmann é caracterizada pela noção de individualidade dos sistemas. Nesta estatística duas complexões que realizam uma mesma distribuïção são diferentes quando, para os mesmos números N_α, *os* sistemas do conjunto se acham distribuídos de maneira diferente do ponto de vista da sua individualidade.

Nesta estatística considera-se por um lado que os sistemas são perfeitamente idênticos e equivalentes uns aos outros, e, por outro lado, não se atribui *nenhuma individual aos diferentes estados de igual probabilidade "à priori" que correspondem à mesma energia.*

Os novos métodos de estatística modificam esta concepção que é um pouco arbitrária.

Para determinar o número de complexões que fornecem uma dada repartição devemos então fazer o número de permutações possíveis entre os N sistemas conservando sempre o mesmo número N_α na célula de energia E_α. Como há N sistemas, o número total de complexões possíveis é $N!$; mas estas complexões não são todas distintas, visto que consideramos idênticas as que se deduzem umas das outras permutando os N_α sistemas contidos na célula de energia E_α.

O número de complexões distintas, e por definição a probabilidade da distribuïção (66) é portanto

$$\Pi = \frac{N!}{N_0!N_1!\ldots N_\alpha!\ldots} \qquad (68)$$

a) *Demonstração da lei de distribuïção de Boltzmann*

A distribuição mais provável será aquela que pode ser realizada pelo número máximo de maneiras, e é a probabilidade desta distribuïção mais provável, quere dizer o máximo de Π que nós vamos procurar.

É um problema puramente matemático dum máximo condicionado, mas em vez do máximo de Π procuraremos o máximo do log Π, o que dá o mesmo.

Como os números N_α, e portanto N, são por hipótese muito grandes podemos desenvolver as factoriais pela fórmula de Moivre-Stirling, conservando apenas os termos importantes:

$$N! = N^N e^{-N} \quad \text{ou} \quad \log N! = N(\log N - 1),$$

de sorte que substituindo em (68) temos

$$\log \Pi = N(\log N - 1) - \sum_\alpha N_\alpha (\log N_\alpha - 1) = N \log N - \sum_\alpha N_\alpha \log N_\alpha . \tag{69}$$

Devemos então procurar o máximo desta expressão condicionado pelas relações

$$N = \sum_\alpha N_\alpha \quad \text{e} \quad U = \sum_\alpha N_\alpha E_\alpha \tag{70}$$

Para isso aplicamos o método dos coeficientes indeterminados e procuramos o máximo incondicionado da expressão

$$N \log N - \sum_\alpha N_\alpha \log N_\alpha - a \sum_\alpha N_\alpha - \beta \sum_\alpha N_\alpha E_\alpha$$

onde a e β são parâmetros independentes de N_α.

Igualando a zero a derivada parcial desta expressão em ordem a N_α vem

$$-\log N_\alpha - 1 - a - \beta E_\alpha = 0 ,$$

donde

$$N_\alpha = e^{-1-a} \cdot e^{-\beta E_\alpha} ,$$

ou ainda, pondo

$$A = e^{-1-a} ;$$
$$N_\alpha = A e^{-\beta E_\alpha} \tag{71}$$

As constantes A e β são positivas: a primeira porque N_α é positivo e a segunda porque N_α não pode devir infinito quando E_α aumenta indefinidamente; os seus valores determinam-se pelas condições (70):

$$N = A \sum_\alpha e^{-\beta E_\alpha} \quad (72) \qquad \text{e} \qquad U = A \sum_\alpha E_\alpha e^{-\beta E_\alpha} \quad (73)$$

Substituindo A pela sua expressão em (72), vem

$$N_\alpha = \frac{N e^{-\beta E_\alpha}}{\sum_\alpha e^{-\beta E_\alpha}} . \tag{74}$$

A probabilidade dum dos sistemas se achar no nível energético E_α é pois

$$\Pi_\alpha = \frac{N_\alpha}{N} = \frac{e^{-\beta E_\alpha}}{\sum_\alpha e^{-\beta E_\alpha}} . \tag{75}$$

A esta quantidade

$$Z = \sum_\alpha e^{-\beta E_\alpha} , \tag{76}$$

TECNICA n.º 2-4/97 JAN 98

que aparece constantemente nos cálculos da Mecânica estatística, dá Planck o nome de *soma dos estados*. (Zustandssumme) Os autores inglêses chamam-lhe função de partição conjunto.

a) *Significação física de β, $\log \Pi$, e Z.*

Uma vez obtida a lei (74) a primeira coisa a fazer é mostrar o paralelismo dêstes resultados com a termodinâmica e indicar a significação física das grandezas β, $\log \Pi$, e Z.

Para isso suponhamos que se modifica progressivamente o estado dos sistemas do conjunto modificando os campos de fôrças exteriores em que êles se acham imersos e cedendo-lhes ou tomando-lhes calor por meio de termostatos convenientes. A energia E_α dum sistema depende dos valores dos campos exteriores, e se por uma modificação exterior E_α devem $E_\alpha + \delta E_\alpha$ isso quere dizer que nós fornecemos ao sistema um trabalho δE_α. Ao conjunto fornecemos portanto, um trabalho

$$\sum_\alpha N_\alpha \delta E_\alpha .$$

No que respeita a quantidade de calor δQ posta em fogo ela será, em virtude do princípio da conservação

$$\delta Q = \delta U - \sum_\alpha N_\alpha \delta E_\alpha . \tag{77}$$

Admitamos que a modificação se efectue com uma lentidão suficiente para que a distribuição mais provável não deixe nunca de se achar realizada (modificação reversível). A distribuição dos sistemas modifica-se, A e β variam, mas N fica constante e nós vamos ver como varia a probabilidade da distribuição mais provável. Temos, primeiro para o valor máximo de $\log \Pi$, substituindo (72) e (73) em (69)

$$\begin{aligned}\log \Pi &= N \log N - A \sum_\alpha e^{-\beta E_\alpha} (\log A - \beta E_\alpha) \\ &= N \log N - \log A \sum_\alpha N_\alpha + \beta \sum_\alpha N_\alpha E_\alpha \\ &= N \log N - N \log A + \beta U\end{aligned}$$

e em seguida para a sua variação

$$\delta \log \Pi = \beta \delta U + U \delta \beta - N \frac{\delta A}{A} .$$

Diferenciando a equação (72)

$$0 = \delta A \sum_\alpha e^{-\beta E_\alpha} - A \sum_\alpha e^{-\beta E_\alpha} (\beta \delta E_\alpha + E_\alpha \delta \beta) .$$

e, em virtude de (73) e (74)

$$0 = N \frac{\delta A}{A} - U \delta \beta - \beta \sum_\alpha N_\alpha \delta E_\alpha .$$

Portanto

$$\delta \log \Pi = \beta \delta U - \beta \sum_\alpha N_\alpha \delta E_\alpha = \beta \left(\delta U - \sum_\alpha N_\alpha \delta E_\alpha \right) = \beta \delta Q \tag{78}$$

em virtude de (77).

Ora δQ, como sabem, não é em geral uma diferencial exacta, mas $\delta \log \Pi$ é-o; portanto β é um factor integrante de δQ. E sabem que só a função $\frac{1}{kT}$, *independente da natureza do nosso conjunto de sistemas*, goza da propriedade de ser um factor integrante da quantidade de calor. Somos pois conduzidos a pôr

$$\beta = \frac{1}{kT} , \tag{79}$$

e portanto

$$\delta \log \Pi = \frac{1}{kT}\delta Q = \frac{1}{k}\delta S ,$$

designando por S a entropia do conjunto de sistemas.

Quere dizer

$$\delta S = k\delta \log \Pi$$
$$\text{e} \quad S = k \log \Pi + a . \tag{80}$$

É esta a famosa equação de Boltzmann que estabeleceu a ponte entre os modos de raciocínio da Termodinâmica e da Mecânica estatística clássica.

Sabem que Boltzmann foi conduzido a esta relação fazendo a análise dos choques entre moléculas e admitindo que elas se acham num estado de agitação completamente desordenado.

Com os trabalhos de Planck e Einstein, e após longas discussões, prevaleceu a ideia de *definir estatisticamente* a entropia pela relação (80) sem constante aditiva. Mas então era necessário precisar o sentido de II. A probabilidade matemática dom estado macroscópico dado do conjunto é, por definição, o cociente do número de estados microscópicos diferentes que correspondem a êsse estado macroscópico pelo número total de estados possíveis; é pois uma fracção própria, e não se podia evidentemente identificá-la com *log* Π visto que S é essencialmente positiva. Prevaleceu a opinião de identificar Π com o numerador daquela fracção. Esta definição de *probabilidade termodinâmica* comporta ainda uma grande parte de arbitrário, mas justifica-se empiricamente pela exactidão das suas consequências, em particular pelo seu acôrdo com o princípio de Nernst.

Obtida a expressão da entropia temos para a energia utilizável (Gibbs e Helmoltz)

$$F = U - TS = U - kT\left(N \log N - N \log A + \frac{U}{kT} \right)$$

$$F = -NkT \log \frac{N}{A} ,$$

ou ainda

$$F = -NkT \log Z . \tag{81}$$

O valor médio da energia livre dum sistema será então:

$$\overline{F} = \frac{F}{N}\overline{F} = -kT \log Z \tag{82}$$

Tôdas as grandezas termodinâmicas recebem deste modo uma interpretação estatística, e isto é certamente, como diria um pontífice, uma das provas mais salientes da potência do pensamento científico.

A significação da constante *k* obter-se-á mais adiante.

c) Os casos de degenerescência

É simples a modificação dêstes resultados que os torna aplicáveis aos casos de degenerescência.

Fixemos numa mesma célula os g_α estados de igual energia e de igual probabilidade "à priori"; o número de sistemas nessa célula será $g_\alpha N_\alpha$; o estado energético E_α tendo agora um *pêso* g_α a modificação a introduzir nas fórmulas (76 e 74) é imediata; temos

$$Z = \sum_\alpha g_\alpha e^{-\beta E_\alpha} \qquad N_\alpha = \frac{N g_\alpha e^{-\beta E_\alpha}}{\sum g_\alpha e^{-\beta E_\alpha}} ; \tag{83}$$

com efeito, se todos estes g_α estados de igual energia E_α, são também de igual probabilidade "à priori", na distribuição mais provável a cada um deles deve corresponder o mesmo número N_α de sistemas.

Para o valor médio duma propriedade E teremos

$$\bar{E} = \frac{\sum_\alpha g_\alpha E_\alpha e^{-\beta E_\alpha}}{\sum_\alpha g_\alpha e^{-\beta E_\alpha}} \tag{84}$$

Sucessão contínua de estados de energia

Os casos de degenerescência permitem fazer a transição do caso descontínuo ao caso contínuo.

Consideremos um grande número de sistemas físicos idênticos (átomos, moléculas, etc.) com n graus de liberdade e independentes uns dos outros.

Suponhamos que os sistemas evoluem segundo as leis naturais, mas que partem de estados iniciais que diferem dum sistema para outro.

Para podermos seguir, pelo menos em princípio, a evolução dum destes sistemas convém representar o seu estado, ou fase instantânea, por um ponto num espaço a $2n$ dimensões. Êste ponto será definido pelos valores das n coordenadas Q_α e dos n momentos conjugados P_α.

Ao conjunto dos nossos sistemas corresponderá no espaço das fases uma *constelação*, ou uma *poeira* de pontos representativos com uma certa densidade $\rho\ (Q_\alpha, P_\alpha, t)$.

A substituïção das velocidades generalizadas Q_α pelos momentos P_α permite, como sabem, escrever as equações do movimento sob a forma seguinte, muito *simples* e *simétrica*, dita *canónica*, quando as fôrças derivam duma energia potencial:

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{\delta H}{\delta P_\alpha}, \quad \dot{P}_\alpha = -\frac{\delta H}{\delta Q_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots n\,. \tag{85}$$

$H(Q_\alpha, P_\alpha, t)$ é a chamada função de Hamilton; no caso dum sistema com ligações independentes do tempo H representa a energia total; se além disto a energia potencial não contém explicitamente o tempo, a energia fica constante, o sistema é conservativo, e o ponto representativo descreve uma curva contínua sôbre uma hipersuperfície que é uma multiplicidade a $2n$-1 dimensões: $H = E = const.$

Só consideraremos sistemas evoluindo nestas condições. Em particular as conclusões que vamos tirar já não são válidas se há dissipação de energia.

a) *Teorema de Liouville*

Vamos mostrar que se a evolução dos sistemas é regida pelas equações de Hamilton (85) a densidade dos pontos de fase não varia no decorrer do seu movimento.

Consideremos um paralelipípedo elementar, *fixo* no espaço das fases, de volume

$$d\Omega = dQ_1 \ldots dQ_n dP_1 \ldots dP_n$$

e seja

$$dN = \rho d\Omega$$

o número dos pontos de fase nêle contidos no instante t.

Os pontos de fase entram e saiem pelas faces do paralelipípedo.

Consideremos por exemplo as duas faces normais ao eixo Q_1 e correspondentes aos valores Q_1, e Q_1+dQ_1. desta coordenada; seja dS a área (a 2n-1 dimensões) destas faces.

O número de pontos que entram durante dt pela primeira face é

$$\rho\dot{Q}_1 \; dS \; dt \, ,$$

e o número de pontos que saiem, durante o mesmo tempo, pela face oposta será

$$\left[\rho\dot{Q}_1 + \frac{\delta}{\delta Q_1}\left(\rho\dot{Q}_1\right)dQ_1\right]dS \; dt \, .$$

O excesso dos pontos que entram sôbre os pontos que saiem através destas faces é pois

$$-\frac{\delta}{\delta Q_1}\left(\rho\dot{Q}_1\right)d\Omega dt \, .$$

Fazendo o mesmo cálculo para todos os outros pares de faces e somando obtemos

$$-\sum_\alpha\left[\frac{\delta}{\delta Q_\alpha}\left(\rho\dot{Q}_\alpha\right)+\frac{\delta}{\delta P_\alpha}\left(\rho\dot{P}_\alpha\right)\right]d\Omega dt \, .$$

Êste acréscimo de pontos de fase no interior de $d\Omega$ durante o tempo dt deve ser igual a $\frac{\delta}{\delta t}(\rho d\Omega)dt$ e portanto

$$\frac{\delta\rho}{\delta t}+\sum_\alpha\left(\frac{\delta}{\delta Q_\alpha}\left(\rho\dot{Q}_\alpha\right)+\frac{\delta}{\delta P_\alpha}\left(\rho\dot{P}_\alpha\right)\right)=0 \, . \tag{86}$$

Notemos que $\frac{\delta\rho}{\delta t}$ representa o acréscimo de ρ na unidade de tempo e num elemento de volume *fixo* do espaço das fases.

É evidente que $\frac{\delta\rho}{\delta t}=0$ se os pontos de fase se acham uniformemente distribuidos, porque então $\frac{\delta\rho}{\delta Q_\alpha}=\frac{\delta\rho}{\delta P_\alpha}=0$. Mais, como a energia *E* dum dado sistema não varia no decorrer do tempo é também evidente que a densidade da distribuïção não variará com o tempo se os pontos de fase se acham distribuidos no espaço das fases segundo uma função *"à priori" qualquer* da energia: *ρ=f (E),* mas uniformemente em cada domínio compreendido entre os limites E e $E+dE$.

Quere dizer

$$\frac{\delta\rho}{\delta t}=0 \tag{87}$$

se a distribuïção é meramente função da energia dos sistemas.

Tais conjuntos dizem-se em *equilíbrio estatístico.*

Calculemos agora o acréscimo da densidade na unidade de tempo $\frac{D\rho}{Dt}$ quando acompanhamos um grupo de pontos no seu movimento.

Temos

$$\frac{D\rho}{Dt}=\frac{\delta\rho}{\delta t}+\sum_\alpha\left(\frac{\delta\rho}{\delta Q_\alpha}\dot{Q}_\alpha+\frac{\delta\rho}{\delta P_\alpha}\dot{P}_\alpha\right)$$

que em virtude de (65) se pode escrever

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \sum_{\alpha} \left(\frac{\delta \dot{Q}_{\alpha}}{\delta Q_{\alpha}} + \frac{\delta \dot{P}_{\alpha}}{\delta P_{\alpha}} \right) = 0 \,. \tag{88}$$

Mas das equações de Hamilton tiramos que todos os termos do somatório são nulos, de sorte que

$$\frac{D\delta}{Dt} = 0 \text{ , isto é } \rho\text{=const.} \tag{89}$$

Êste resultado exprime o teorema de Liouville ou *princípio da conservação da densidade em fase.*

No livro de Boltzmann encontram outras demonstrações dêste teorema.

b) *Outro aspecto deste resultado*

Consideremos um pequeno elemento de volume $\Delta\Omega$. O número de pontos de fase nêle contidos num dado instante t será $\Delta N = \rho\Delta\Omega$.

Sigamos êste elemento no seu movimento através do espaço das fases com os pontos que êle contém. Como não há creação nem destruïção de sistema, temos evidentemente

$$\frac{D(\Delta N)}{Dt} = \frac{D\rho}{Dt}\Delta\Omega + \rho\frac{D}{Dt}(\Delta\Omega) = 0 \,.$$

Mas $\frac{D\rho}{Dt} = 0$, portanto

$$\frac{D}{Dt}(\Delta\Omega) = 0 \text{ ou } \Delta\Omega\text{=const.}$$

Quere dizer, se numa dada região do espaço das fases traçarmos uma superfície que envolva um grupo de pontos de fase e se acompanharmos êstes pontos no movimento sôbre as suas trajectórias, a forma da superfície pode modificar-se mas o volume que ela limita não varia:

$$\int \ldots \int dQ_1 \ldots dQ_n dP_1 \ldots dP_n = const. \tag{90}$$

É o *princípio da conservação da extensão em fase.*

Além desta propriedade de conservação a extensão em fase goza também da propriedade de invariância.

Demonstra-se com efeito que o integral (90) é invariante em tôda a transformação de coordenadas que conserva a forma canónica às equações do movimento (transformação de contacto).

Esta invariância da extensão em fase inclui de resto a sua constância durante o movimento, porque o movimento dum sistema hamiltoniano pode ser considerado como uma sucessão de transformações de contacto infinitesimais.

c) Probabilidade "à priori" – Conjuntos canónicos e microcanónicos

Êstes teoremas permitem afirmar *a igual probabilidade "à priori" dos diferentes elementos de volume $d\Omega$ iguais contidos numa mesma camada de energia E, a menos dE.*(1)

Quere dizer que a probabilidade de presença dum ponto representativo num elemento de volume $d\Omega$ da camada dE será proporcional a $d\Omega$.

---

(1) O teorema de Liouville é uma consequência da forma hamiltoniana das equações da Mecânica clássica; mas as equações da Mecânica relativística podem ser postas sob uma forma hamiltoniana, de sorte que êste resultado, conseqüência do teorema de Liouville, subsiste no quadro da Dinâmica relativística.

Se considerarmos então todos os elementos da extensão em fase correspondentes às energias compreendidas entre E e $E+dE$ e se a extensão dêstes elementos fôr $d\Omega$ devemos nas fórmulas (62) e (63) substituir g_α por $d\Omega$, substituir os somatórios por integrais, eliminar os índices e escrever, sob a forma diferencial

$$dN = \frac{Ne^{\frac{E}{kT}} d\Omega}{\int e^{-\frac{E}{kT}} d\Omega} \cdot \tag{91}$$

Pondo

$$\int e^{-\frac{E}{kT}} d\Omega = e^{-\frac{\Psi}{kT}}$$

vem

$$dN = Ne^{\frac{\Psi - E}{kT}} d\Omega \tag{92}$$

que é a célebre fórmula dos *conjuntos canónicos* que Gibbs põe quási "à priori" nos seus Princípios Elementares de Mecânica Estatística.

A densidade dos pontos de fase tem aqui a forma

$$\rho = Ne^{\frac{\Psi - E}{kT}}$$

onde ψ representa o papel de energia livre; $kT=0$ é o *módulo* do conjunto.

Se quisermos então calcular o valor médio duma função tal como a energia E, susceptível duma infinidade contínua de valores possíveis, teremos

$$\overline{E} = \frac{\int Ee^{\frac{E}{kT}} d\Omega}{\int e^{-\frac{E}{kT}} d\Omega} \cdot \tag{93}$$

Um conjunto diz-se *microcanónico* se *todos os* seus pontos de fase caem numa mesma camada de espessura dE e nela se acham distribuídos com uma densidade uniforme, isto é

ρ=c.^{te} em toda a camada dE,

e

ρ=0 fóra da camada,

Um conjunto canónico pode pois decompôr-se numa infinidade de conjuntos microcanónicos; isto equivale a decompôr o espaço das fases em lamelas de espessura dE na vizinhança das hipersuperfícies

E=const.:

a densidade $Ne^{\frac{\Psi - E}{kT}}$ é uniforme em tôda a camada visto que nela E é constante, e em virtude do teorema de Liouville esta distribuïção uniforme persistirá indefinidamente.

Se $V(E)\, dE = d\Omega$ é a extensão duma dessas camadas, o número de pontos que nela caiem será

$$Ne^{\frac{\Psi - E}{kT}} V dE \,. \tag{94}$$

O facto importante no que respeita à comparação dos dois tipos de conjuntos é que o factor de dE em (94) apresenta um máximo muito pronunciado para um valor determinado de E. Isto pode demonstrar-se rigorosamente em casos particulares (Lorentz), e parece permitido admiti-lo igualmente no caso geral.

Êste carácter do máximo de $e^{\frac{\psi - \Omega}{kT}} V$ constitui uma propriedade muito importante dos conjuntos canónicos porque dela resulta que a quási totalidade dos pontos de fase se vai acumular numa camada ΔE de fraca espessura. Esta camada define um conjunto microcanónico que pode substituir em tôdas as aplicações o conjunto canónico.

As fronteiras da camada são nítidas no segundo caso e difusas no primeiro, mas isto não constitui diferença essencial.

d) *Hipótese ergódica.*

Até aqui admitimos simplesmente que os sistemas obedecem às leis da dinâmica sob a forma canónica. Se quisermos ir mais longe e obter indicações mais precisas do que as fornecidas pelo teorema de Liouville é necessário introduzir a hipótese que Boltzmann designava por *hipótese ergódica* e Maxwell por *princípio da continuïdade trajectória.*

Consideremos um sistema que não possua outro integral primário uniforme além da sua energia E. A hipótese consiste em admitir que a trajectória do sistema no fim dum tempo suficientemente longo encherá uniformemente tôda a camada dE da extensão em fase, que o ponto de fase passará, mais cedo ou mais tarde, infinitamente perto de todo o ponto desta camada antes de completar o seu ciclo de movimento.

Desta forma, parece que um conjunto microcanónico de sistemas com energias compreendidas entre E e E+dE poderia dar a cada instante uma representação completa de tôdas as fases, compatíveis com a energia E, pelas quais passa no decorrer do tempo um sistema único do conjunto.

Em vez duma trajectória única podemos considerar um feixe de trajectórias saídas dum elemento de volume da camada no instante t=0; é a hipótese *quási-ergódica.*

Esta hipótese não poude ainda ser demonstrada rigorosamente, mas se se reflecte um pouco, diz Lorentz, adquire-se o sentimento de que a grande complexidade dos sistemas moleculares a deve favorecer. Temos de resto uma certa justificação empírica da hipótese no facto que as suas consequências são confirmadas pela experiência.

A hipótese apresenta um grande interêsse, que é o de permitir substituir as médias tomadas no tempo, calculadas durante um tempo muito longo, para um sistema ou para um grupo de sistemas dados, por médias calculadas num mesmo instante para um grande número de sistemas repartidos uniformemente em tôda a camada $E+dE$.

Esta hipótese pode traduzir-se na linguagem das probabilidades descontínuas; equivale a admitir que um sistema, no decorrer da sua história, persiste em média o mesmo tempo em cada um dos estados energéticos E_a em que as restricções quânticas lhe permitem existir.

e) *Aplicação à Teoria Cinética.*

Para obtermos a interpretação do coeficiente k da lei de Boltzmann que é uma constante universal, vamos aplicar os resultados precedentes à teoria cinética dos gases.

Consideremos um gás perfeito monoatómico, contido num recipiente de volume V, em equilíbrio à temperatura T; seja N o número de moléculas e m a massa de cada uma delas. O ponto de fase duma molécula será definido pelas três coordenadas de posição x, y, z e pelas três componentes da sua impulsão linear $p_x = mx, p_y = my, p_z = mz$.

O espaço das fases será portanto a seis dimensões e o seu elemento de volume da forma

$$d\Omega = dx\,dy\,dz\,dp_x\,dp_y\,dp_z\,.$$

A energia cinética duma molécula será

$$E_{cin} = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right)$$

e o seu valor médio

$$\overline{E}_{cin} = \frac{\int E_{cin} e^{-\frac{E_{cin}}{kT}} d\Omega}{\int e^{-\frac{E_{cin}}{kT}} d\Omega}$$

Obtemos sem dificuldade integrando

$$\overline{E}_{cin} = \frac{3}{2}kT\ ,$$

e para as *N* moléculas

$$\overline{NE}_{cin} = \frac{3}{2}NkT\ , \qquad (95)$$

Calculemos agora, mas *sem nos subordinarmos a qualquer hipótese sôbre o método de estatística empregado, a pressão do gás.*

Para isso utilizamos o *teorema do virial* limitando-nos às fracas velocidades.

f) *Teorema do virial.*

Sejam x, y, z as coordenadas de posição duma molécula de massa m e X, Y, Z as componentes da força que sobre ela actua no instante t.

As equações do movimento sob a forma newtoniana são

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X \quad etc.$$

Como

$$\frac{d}{dt}\left(mx\frac{dx}{dt}\right) = m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + mx\frac{d^2x}{dt^2}\ ,$$

utilizando a equação anterior obtemos

$$\left[m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + xX\right]dt = d\left(mx\frac{dx}{dt}\right).$$

Calculemos o valor médio destas expressões para um intervalo de tempo t_2-t_1

$$m\overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} + \overline{xX} = \frac{1}{t_2 - t_1}\left[\left(mx\frac{dx}{dt}\right)_{t_2} - \left(mx\frac{dx}{dt}\right)_{t_1}\right].$$

Se tomarmos um intervalo de tempo suficientemente longo é evidente que os termos da esquerda tendem para valores estacionários, enquanto que o da direita tende para zero, porque por hipótese, nem a coordenada x nem a componente da velocidade $\frac{dx}{dt}$ tomam valores infinitos.

Portanto a média calculada durante um intervalo de tempo suficientemente longo para uma molécula, ou a média num dado instante para tôdas as moléculas do gás dá

$$m\overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} + \overline{xX} = 0\ .^{(2)}$$

---

(2) O intervalo de tempo t_2-t_1 deve simplesmente ser muito grande em relação ao livre percurso médio das moléculas. Como êste livre percurso médio nas condições nor-

Para os outros dois eixos temos expressões análogas; juntando-as, somando para tôdas as moléculas e dividindo por 2 obtemos

$$\Sigma \frac{1}{2} \overline{mc^2} = -\Sigma \frac{1}{2} \overline{(xX + yY + zZ)} . \tag{96}$$

O primeiro termo representa a energia cinética das *N* moléculas e o segundo o *virial* de Clausius. A igualdade traduz o teorema célebre do virial.

g) *Cálculo da pressão – Significado de k*

Apliquemos agora esta expressão ao cálculo da pressão. Como o gás é perfeito só temos de contar com as fôrças que se exercem entre as moléculas e as parêdes do recipiente. Seja *dS* um elemento desta parêde, (l,m,n) os cosenos directores da sua semi-normal exterior; êste elemento exerce sôbre o gás uma fôrça de componentes $-lpdS$, $-mpdS$, $-npdS$, designando por *p* a pressão uniforme. O virial da pressão é pois

$$\frac{1}{2} p \int (lx + my + nz) dS$$

que se pode escrever ainda em virtude do teorema de Ostrogradsky

$$\frac{1}{2} p \int \left(\frac{\delta x}{\underbrace{\delta x}_{1}} + \frac{\delta y}{\underbrace{\delta y}_{1}} + \frac{\delta z}{\underbrace{\delta z}_{1}} \right) dV = \frac{3}{2} pV ,$$

e portanto

$$N\overline{E}_{cm} = \frac{3}{2} pV . \tag{97}$$

Identificando com (95) vem

$$pV = NkT .$$

Sabemos finalmente da termodinâmica dos gases perfeitos que

$$pV = RT ,$$

de sorte que

$$k = \frac{R}{N} .$$

R é a constante dos gases perfeitos e *N* o número de Avogadro. O valor numérico de *k* é

$$k = \frac{8{,}32 \times 10^7}{6{,}06 \times 10^{23}} = 1{,}37 \times 10^{-16} ergs.grau^{-1}.mol^{-1}$$

Flutuações da energia

Vamos agora calcular a amplitude das fluctuações da energia em tôrno do seu valor médio.

O raciocínio que vamos fazer é geral; aplica-se a sistemas cujos estados de energia formem uma sucessão contínua ou discontínua, e quer sejam degenerados ou não.

---

mais é da ordem de 10^{-5} cm e *c* da ordem 10^4 cm seg^{-1} a duração do livre percurso médio é da ordem de 10^{-9} seg.

O intervalo de integração não precisa pois de ser uma grande fracção do segundo.

Consideremos um sistema único, que pode ser por exemplo uma porção de matéria, e concebamos um conjunto formado dum grande número de cópias dêste sistema num ambiente à temperatura T. Entre o sistema considerado e o meio ambiente, que funciona de termostato, vão-se dar trocas de energia; se num dado instante a energia do sistema tem o valor E e, em média, o valor $\overline{E}$, a flutuação será

$$\varphi = E - \overline{E} \,. \tag{98}$$

Não podemos naturalmente aferir as fluctuações pelo valor médio φ porque é nulo, mas podemos utilizar o seu valor quadrático médio.

Temos

$$\overline{\varphi^2} = \overline{E^2 - 2E\overline{E} + \left(\overline{E}\right)^2} = \overline{(E)^2} - \left(\overline{E}\right)^2 , \tag{99}$$

que é positivo como sabem. Mas esta fluctuação quadrática média exprime-se duma maneira muito simples em função de $\frac{d\overline{E}}{dT}$.

Com efeito

$$\frac{d\overline{E}}{dt} = \frac{1}{kT^2}\left[\frac{\Sigma E_\alpha^2 g_\alpha e^{-\frac{E\alpha}{kT}}}{\Sigma g_\alpha e^{-\frac{E\alpha}{kT}}} - \frac{\left(\Sigma E_\alpha g_\alpha e^{-\frac{E\alpha}{kT}}\right)^2}{\left(\Sigma g_\alpha e^{-\frac{E\alpha}{kT}}\right)^2}\right], \tag{100}$$

quere dizer precisamente, por definição, a expressão anterior.

Temos então

$$C = \frac{d\overline{E}}{dt} = \frac{1}{kT^2}\left(\left(\overline{E^2}\right) - \left(\overline{E}\right)^2\right) = \frac{\overline{\varphi^2}}{kT^2} \tag{101}$$

que é a relação que pretendíamos estabelecer.

Esta expressão é inteiramente geral. Darwin e Fowler ([3]) usando do seu método original das funções de partição, que evita a fórmula de Stirling, obtem a mesma expressão para $\frac{d\overline{E}}{dT}$.

Raciocínio de Einstein ([4])

Notando que $\frac{dE}{dt}$ é o calor específico C do sistema sob acção exterior constante temos

$$\overline{\varphi^2} = kCT^2 \,. \tag{102}$$

Einstein consegue obter esta mesma relação seguindo um outro caminho que utiliza a equação

$$dS = kd(\log \Pi) \,.$$

As fluctuações de energia resultam da incoordenação do movimento de agitação térmica. Seja de novo $\overline{E}$ a energia média do sistema correspondente à temperatura T do termostato; se há fluctuação quere dizer que num dado instante a energia do sistema tem um valor E que se desvia de E duma pequena quantidade $\varphi = C\Delta T$. O calor específico C pode ser considerado constante se φ é pequena. Designando por $T + \frac{\varphi}{C}$ a temperatura naquele instante, a variação de entropia será

([3]) Phil. Mag., 261 e 263, 1922.
([4]) Congrès Solvay, 1912.

$$dS = d\varphi\left(\frac{1}{T+\frac{\varphi}{C}} - \frac{1}{T}\right),$$

ou despresando os termos de ordem superior

$$dS = -\frac{\varphi}{CT^2}d\varphi,$$

e integrando

$$S = -\frac{\varphi}{2CT^2} + c^{te}.$$

A probabilidade Π de se dar um desvio φ é

$$\log \Pi = -\frac{\varphi^2}{2kCT^2} + a$$

$$\Pi = Ae^{-\frac{\varphi^2}{2kCT^2}}$$

e o valor médio de φ^2 obtém-se pela relação de definição

$$\frac{\int \varphi^2 e^{-\frac{\varphi^2}{2kCT^2}} d\varphi}{\int e^{-\frac{\varphi^2}{2kCT^2}} d\varphi}$$

Integrando obtemos

$$\overline{\varphi^2} = kCT^2$$

que coincide com (102).

Se se conhece portanto E em função de T, conhece-se $\frac{dE}{dt}$ e por intermédio de (102), $\overline{\varphi^2}$, ou inversamente.

Isto conduz-nos a observar que os resultados experimentais se podem utilizar de duas maneiras diferentes quando se procura fazer uma imagem do que se passa num sistema quando a sua temperatura se eleva e êle emite energia.

Podemos considerar – e é a via mais directa – a equação

$$E = f(T)$$

para a energia do radiamento, e forjar uma teoria fazendo hipóteses sôbre a estructura matéria e do radiamento, tais que a forma da função f verifique os resultados experimentais sôbre as medidas de E em função de T. *Foi a via seguida por Planck e que o conduziu à hipótese dos quanta de energia.*

Mas podemos ainda proceder de outra maneira: Considerar a lei de dependência de E e de T como puramente empírica, tirar da fórmula (102) os valores $\overline{\varphi^2}$ que serão então considerados como valores *experimentais* desta quantidade, e fazer em seguida sôbre a estructura da matéria e do radiamento hipóteses que permitam explicar estas fluctuações. *Foi a via seguida por Einstein e que lhe permitiu fazer compreender em 1912 aos membros do Congresso Solvay a necessidade de voltar num certa medida a uma concepção corpuscular do radiamento.*

Encarando as coisas sob êste ponto de vista, podemos dizer (Lorentz) que não sómente as fluctuações são uma conseqüência necessária das teorias modernas, mas ainda que elas nos fornecem a chave de tôda a teoria do radiamento.

É o que mais adiante veremos.

III PARTE
EQUILÍBRIO DO RADIAMENTO

Prof. António da Silveira
Prof. de Física Geral e Experimental do I.S.T

Partição da energia

Vamos mostrar que os métodos da estatística clássica, onde se admite que cada sistema possui uma certa individualidade e é susceptível de passar por uma sucessão contínua de estados, conduzem a resultados contrários à experiência. Em particular das leis da Mecânica estatística deduz-se rigorosamente o teorema da equipartição da energia e êste teorema conduz à lei de Lord Rayleigh que é incompatível com a experiência.

Começaremos por nos ocupar da distribuição da energia pelos diferentes graus de liberdade dum sistema. Primeiro vamos derivar da lei de distribuição de Boltzmann-Gibbs uma lei geral de equipartição que diz *existir uma função das coordenadas e dos momentos cujo valor médio é kT para cada coordenada ou para cada momento considerado.* Em seguida mostraremos que esta lei se reduz ao *princípio da equipartição da energia* para tôdas as coordenadas ou momentos que contribuem para a energia com termos quadráticos.

a) *A lei geral de equipartição*

Escrevamos a lei de Boltzmann sob a forma

$$\int \ldots \int A e^{-\frac{E}{kT}} dQ_1 \ldots dP_n = 1$$

e efectuemos uma integração parcial relativamente a Q_1 por exemplo:

$$\left| \int \ldots \int A e^{-\frac{E}{kT}} Q_1 dQ_2 \ldots dP_n \right|_{Q_1 \inf.}^{Q_1 \sup} + \int \ldots \int A e^{-\frac{E}{kT}} \frac{Q_1}{kT} \frac{\delta E}{\delta Q_1} dQ_1 \ldots dP_n = 1 \qquad (103)$$

Para interpretarmos esta equação consideraremos dois casos:

1.º) E é independente de Q_1;

2.º) E depende de Q_1 de tal modo que o seu valor devém infinito quando Q_1 devém infinita.

Teremos um exemplo do primeiro caso quando Q_1 representa uma coordenada de posição duma molécula dum gaz diluído na ausência de campos de fôrças exteriores. Nestes casos o segundo termo é nulo. Os casos que interessam são aquêles em que E devém infinita com Q_1, esta coordenada tomando então nos limites ou os valores 0 e ∞ ou os valores +∞ e -∞.

Será o caso se Q_1 representa um deslocamento associado a uma energia potencial que aumenta além de todo o limite com a coordenada. É o caso ainda se a variável em questão representa uma impulsão linear: a um valor infinito positivo ou negativo da impulsão corresponde um valor infinito da energia cinética. Nestes casos o primeiro termo de (103) é nulo em ambos os limites e a equação toma a forma

TÉCNICA n.º 3-4/97 JAN 98

$$\int \ldots \int A e^{-\frac{E}{kT}} \left(Q_1 \frac{\delta E}{\delta Q_1} \right) dQ_1 \ldots dP_n = kT \, .$$

Mas o primeiro membro representa o valor médio da quantidade entre parêntesis, e portanto

$$\overline{\left(Q_1 \frac{\delta E}{\delta Q_1} \right)} = \ldots = \overline{\left(P_n \frac{\delta E}{\delta P_n} \right)} = kT \, ; \qquad (104)$$

É a *lei geral da equipartição* que pretendíamos estabelecer.

Notem que aqui tomou-se não uma média no tempo para um sistema único, mas uma média num mesmo instante para todos os sistemas do conjunto.

b) *A equipartição da energia.*

Em muitos casos a coordenada Q_α, contribui para a energia ùnicamente com um termo da forma

$$E_\alpha = \frac{1}{2} a_\alpha Q_\alpha^2 \, ,$$

onde a_α é uma constante. É o caso se Q_α representa um deslocamento associado a uma fôrça elástica que obedece à lei de Hook, ou se a variável representa uma impulsão linear ou angular.

Nestes casos (104) reduz-se a

$$\overline{E_\alpha} = \frac{1}{2} kT \qquad (105)$$

que traduz o conhecido *princípio da equipartição da energia para tais coordenadas ou momentos.*

Êste princípio é uma consequência da hipótese que *a energia é uma função quadrática e homogénea das coordenadas e dos momentos.* Se esta hipótese se não verifica não ha equipartição.

c) *Partição da energia na Teoria da relatividade*

Vejamos rápidamente os desvios relativamente à equipartição quando se utilizam as leis da relatividade no estudo do movimento das moléculas dum gás em vez das leis newtonianas, válidas sòmente para pequenas velocidades.

Na Mecânica relativística a energia total duma partícula é da forma

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

e as impulsões lineares

$$p_x = \frac{m_0 \dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{etc.} \qquad (106)$$

Como

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \, ,$$

definindo o momento total pela equação

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$$

obtemos

$$E = c\sqrt{p^2 + m_0 c^2}\ .$$

A lei geral da equipartição dá então

$$\overline{p_x \frac{\delta E}{\delta p_x}} = \overline{p_x c\left(p^2 + m^2 c^2\right)^{-\frac{1}{2}} p_x} = kT\ .$$

Substituindo aqui (106) obtemos

$$\overline{\left(\frac{m_0 \dot{x}^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right)} = \ldots = kT\ ,$$

e somando

$$\overline{\left(\frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right)} = 3kT\ . \qquad (107)$$

Comparemos êste resultado tirado da lei geral de equipartição com o valor da energia *cinética* média duma molécula tirada da teoria da relatividade. Temos

$$\overline{E}_{cin.} = m_0 c^2 \overline{\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right)}\ ; \qquad (108)$$

desenvolvendo em série (107) e (108) e combinando-as vem

$$\overline{E}_{cin.} = \frac{3}{2}kT + m_0 c^2 \overline{\left(\frac{1}{8}\frac{v^4}{c^4} + \frac{1}{8}\frac{v^6}{c^6} + \frac{15}{128}\frac{v^8}{c^8} + \ldots\right)}\ .$$

Às baixas temperaturas as velocidades das moléculas são pequenas, o parêntesis é despresível e o princípio de equipartição subsiste. Para as altas temperaturas podemos em primeira aproximação substituir $\overline{v^4}$ pelo seu valor dado pela Mecânica newtoniana:

$$\overline{v^4} = 15\left(\frac{kT}{m_0}\right)^2$$

e então vem

$$E = \frac{3}{2}kT + \frac{15}{8M_0}\left(\frac{kT}{c}\right)^2 + \ldots$$

onde M_0 é o pêso molecular.

Como era de esperar, o termo correctivo é tanto maior quanto menor fôr a massa das partículas e quanto mais elevada fôr a temperatura.

Se concebermos um gás com um pêso atómico tão baixo como o do electrão, aproximadamente 1/1800 do do hidrogénio monoatómico, verificamos que à temperatura ambiente o termo correctivo representa apenas $6 \times 10^{-6\,\%}$ do primeiro termo, e, numa estrêla à temperatura de 30.000° representa apenas ainda $6 \times 10^{-4\,\%}$. Quere dizer, para tôdas as temperaturas ordinárias podemos admitir que a partição da energia se faz de acôrdo com a Mecâ-

nica newtoniana para tôdas as partículas com uma massa da ordem da do electrão.

Na III parte ocupar-nos hemos dos desvios em relação à equipartição devidos à intervenção das restrições quânticas.

Oscilador harmónico (Planck)

Apliquemos agora os resultados da Mecânica estatística a um conjunto de osciladores de Planck. Cada oscilador será constituído por uma partícula P de massa m obrigada a mover-se sôbre uma recta sob a acção duma fôrça elástica proporcional à distância instantânea da partícula a um centro fixo O, e dirigida para êsse centro: $f = \alpha q$.

A energia total do oscilador será

$$E = \frac{\alpha}{2} q^2 + \frac{1}{2m} p^2 = Aq^2 Bp^2$$

considerando nula a energia da partícula em repouso na sua posição de equilíbrio.

As equações de Hamilton dão

$$\dot{q} = \frac{\delta E}{\delta p} = \frac{p}{m} \quad e \quad \dot{p} = -\frac{\delta E}{\delta q} = -\alpha q \, .$$

Derivando a primeira e eliminando p obtemos

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0, \quad \text{com} \quad \omega^2 = \frac{\alpha}{m} \, ,$$

cujo integral geral é

$$q = q_0 \cos(\omega t - \delta) \, .$$

O movimento espontâneo do sistema é pois um movimento oscilatório harmónico de frequência

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\alpha}{m}} = \frac{1}{\pi}\sqrt{AB} \, , \tag{109}$$

independente de q_0, ou de E.

Concebamos agora um grande número N de osciladores harmónicos e procuremos a sua repartição mais provável pelos diferentes estados de energia susceptíveis de variação contínua.

Planck fez uso da representação de Gibbs: a fase dum oscilador é representada por um ponto de coordenadas (p, q) no plano destas duas variáveis, e a sua trajectória será uma elipse

$$\frac{q^2}{\frac{E}{A}} + \frac{p^2}{\frac{E}{B}} = 1 \tag{110}$$

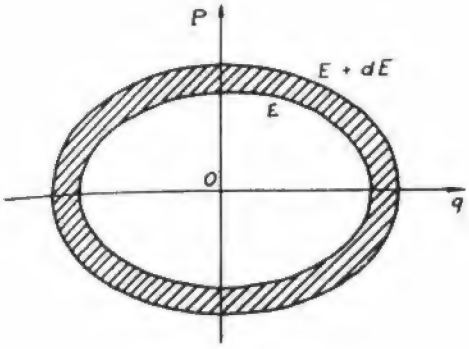
de semi-eixos

$$a = \sqrt{\frac{E}{A}} \quad e \quad b = \sqrt{\frac{E}{B}} \, .$$

q oscila pois entre $+a$ e $-a$, e p entre $-b$ e $+b$.

Consideremos os sistemas cuja energia está compreendida entre E e $E+dE$ e procuremos a expressão do elemento $d\Omega$ do plano das fases que lhes corresponde. Os estados de energia E têm os seus pontos representativos sôbre a elipse (110) e os estados de energia $E + dE$ tem os seus pontos representativos sôbre uma elipse adjacente da primeira e de semi-eixos.

$$a' = \sqrt{\frac{E+dE}{A}} \quad e \quad b' = \sqrt{\frac{E+dE}{B}} \, .$$



Esta elipse é descrita com a mesma frequência porque o oscilador sendo harmónico ν é independente de E.

O elemento d'área $d\Omega$ do plano das fases é pois a área compreendida entre estas duas elipses adjacentes.

Ora a área da elipse interior é

$$\int pdq = \pi ab = \frac{\pi E}{\sqrt{AB}} \, ,$$

e a da elipse exterior

$$\int pdq = \pi a'b' = \frac{\pi(E+dE)}{\sqrt{AB}} \, ,$$

de sorte que

$$d\Omega = \frac{\pi dE}{\sqrt{AB}} = \frac{dE}{\nu} \, . \tag{111}$$

O número de osciladores com energias compreendidas entre E e $E + d\,E$ é portanto

$$Ae^{-\frac{E}{kT}} \frac{dE}{\nu} \, .$$

Hipótese dos quanta da energia

A teoria electromagnética das interacções da matéria e do radiamento e o princípio da equipartição da energia conduziram a uma lei de repartição espectral do radiamento, a lei de Rayleigh-Jeans, em contradição com os factos experimentais para as altas freqüências, e absurda mesmo num certo sentido, porque dela resulta um valor infinito para a densidade total da energia, a uma temperatura qualquer, como veremos mais adiante.([5])

([5]) Notem que energia infinita implica massa infinita.

Procurando evitar estas consequências das teorias clássicas, Planck começa por considerar que a energia média dum oscilador harmónico de freqüência ν exposto ao radiamento contido, num recinto à temperatura T deve depender não só da temperatura T mas também da densidade de energia da radiação de frequência ν presente no recinto.

Aplicando ainda as leis do electromagnetismo Planck obteve, como veremos, para valor da densidade da energia das radiações de freqüência compreendida entre ν e $d\nu$

$$u_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\bar{E}_\nu d\nu \quad ergs \cdot cm^{-3} \tag{112}$$

$\bar{E}_\nu$ designando a energia total média dum oscilador de freqüência ν.

Fazendo nesta equação $\bar{E}_\nu = kT$ de acôrdo com a lei da equipartição, é-se conduzido à lei de Rayleigh-Jeans incompatível com a experiência.

Planck decide-se então a abandonar a lei de equipartição e introduz uma ideia nova: admite que os seus osciladores, de que êle supõe constituída a matéria, só podem emitir energia por *quanta* de grandeza proporcional à freqüência. Com esta hipótese e aplicando uma estatística discontinua a concepção contínua do radiamento chega como veremos à conclusão que cada oscilador de frequência ν deve possuir uma energia média

$$\bar{E}_\nu = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad \text{ergs} \tag{113}$$

onde h e uma constante universal.

Note-se que esta ideia não implicava necessariamente uma estructura discontínua do radiamento uma vez emitido.

Numa primeira teoria (*erste Fassung der Quantentheorie*) Planck admitiu que os osciladores só podiam tomar certos estados de energia quantificados; daqui resultava que tanto no que respeita a absorpção como no que respeita a emissão as trocas de energia entre a matéria e o radiamento se faziam por quanta. Mas então o radiamento teria necessàriamente uma estructura discontínua.

Planck acanhou-se perante uma conseqüência tão subversiva da sua própria ideia e esboçou uma outra teoria (*zweite Fassung der Quantentheorie*) menos radical, na qual admitia que a matéria pode absorver energia radiante duma maneira contínua, mas que só a pode emitir por quanta.

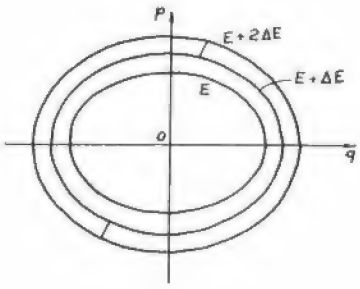
A descoberta do efeito foto-eléctrico e a sua genial interpretarção por Einstein, o estudo das fluctuações da energia do radiamento e os trabalhos de Bohr sôbre a estructura do átomo acabaram por impôr a primeira forma, a forma mais radical, da teoria de Planck. *A absorpção e a emissão seriam discontínuas não sòmente em virtude da estructura dos osciladores, mas também em virtude da própria natureza do radiamento.*

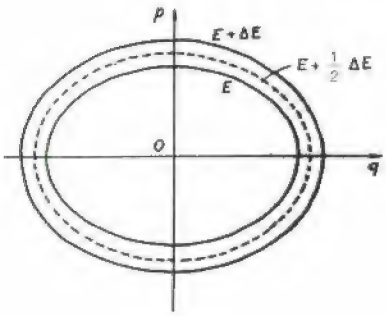
Abandonemos então com Planck, e sem pezar, a concepção clássica da continuïdade dos estados de energia. Indo considerar valores discontínuos da energia, todos êles de igual probabilidade "à priori" devemos conceder-lhes células de igual área no espaço representativo.

Na primeira fase da teoria, tendo em vista a representação de Gibbs, Planck admite que só certas elipses são possíveis e que as elipses que correspondem aos estados sucessivos de energias

$$E,\ E+\Delta E,\ E+2\Delta E \ldots$$

limitam áreas anulares iguais.





Na segunda fase da teoria a energia dum oscilador pode variar duma maneira contínua, mas como a estatística não permite separar os elementos, só podemos observar a energia média. Um oscilador pode absorver duma maneira contínua, mas só pode emitir duma maneira discontínua, por *quanta*. Os pontos de fase acham-se igualmente repartidos por tôda a área compreendida entre as duas elipses E, E + Δ E, mas o valor da energia que intervém é a média de tôdas estas energias, isto é a energia que corresponde à elipse intermédia.

Seja como fôr, a igual probabilidade "à priori" de cada um dêstes estados energéticos exige que as células tenham tôdas a mesma área:

$$\Delta\Omega = \int_{E}^{E+\Delta E} p\,dq = \frac{\Delta E}{\nu}\,.$$

Como ν é uma constante, para que os $\Delta\Omega$ sejam iguais é preciso que ΔE seja constante. Designando por h o valor comum dos $\Delta\Omega$ vem

$$\Delta E = h\nu \tag{114}$$

que é a *relação do quantum de Planck.* ([6])

Os níveis energéticos possíveis do oscilador são pois

$$o, h\nu, 2h\nu, 3h\nu \ldots \quad \text{na primeira teoria}$$

e

$$\frac{h\nu}{2}, \frac{3h\nu}{2}, \frac{5h\nu}{2}, \frac{7h\nu}{2}, \quad \text{na segunda teoria.}$$

Na primeira teoria temos então

$$E_n = nh\nu \qquad n = 0, 1, 2 \ldots; \tag{115}$$

na segunda teoria E já não é um múltiplo de $h\nu$, mas podemos pôr

$$E_n = nh\nu + \rho\,;$$

o oscilador possui n quanta inteiros $h\nu$ e um resíduo $\rho < h\nu$; o número n é a única quantidade que se acha submetida às leis do acaso, enquanto que ρ, que toma naturalmente valores diferentes, num campo de radiamento estacionário, aumenta continuamente e uniformemente em função do tempo.

Para um grande número de osciladores ρ terá por valor médio $\frac{h\nu}{2}$ e então teremos em vez de (115):

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)h\nu\,. \tag{116}$$

([6]) O leitor que se interessa deve ler a memória de Planck publicada no C.R. do Congresso Solvay de 1912 e a sua discussão.

Esta hipótese dos *quanta* de emissão conduz também para o radiamento à fórmula de Planck, mas a relação entre a energia média dum oscilador e a temperatura já não é dada por (113), mas por

$$\overline{E}_\nu = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} + \frac{h\nu}{2} \quad \text{ou}$$

$$\overline{E}_\nu = \frac{h\nu}{2}\frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}+1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}\,.$$ (7)

Planck tirou algumas consequências interessantes desta nova fórmula:

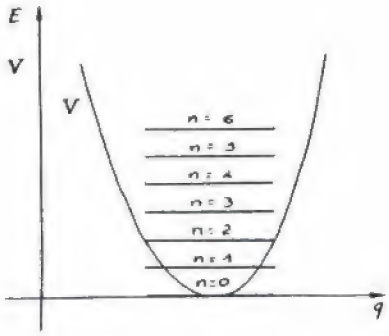
Quando $T=0$, $E_0 = \frac{h\nu}{2}$ e não zero. Esta energia residual persiste mesmo ao zero absoluto, mas não pode ser emitida porque é inferior a $h\nu$: é de certo modo uma energia *ligada*.

A segunda forma da teoria de Planck teve de ser abandonada após os trabalhos de Einstein, mas a Mecânica ondulatória mostra que o sistema possui no seu mais baixo estado quântico uma energia E_0 maior do que a que lhe corresponde em repouso na posição de equilíbrio, e conduz a um valor igual a metade da diferença das energias de dois níveis consecutivos: $\frac{h\nu}{2}$, quere dizer conduz precisamente a uma expressão da forma (116).

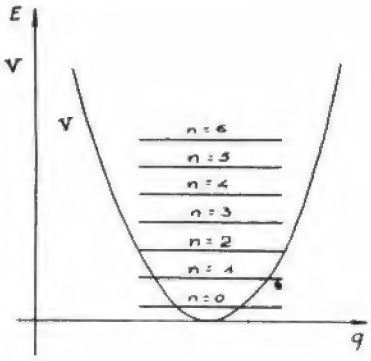
Mais adiante ocupar-nos-hemos dos argumentos que fizeram prevalecer o primeiro ponto de vista.

A existência dum *ponto zero da energia* é característica da Mecânica quântica e melhora o acôrdo da teoria com a experiência. Êste ponto zero da energia tem uma grande importância na Mecânica estatística e a sua existência está ligada com o *Princípio de incerteza* de Heisenberg como veremos no próximo ano.

Nas figuras seguintes acham-se representados os níveis energéticos do oscilador na antiga teoria dos *quanta* e na Mecânica ondulatória:



Níveis da energia dum oscilador harmónico segundo a antiga Teoria dos quanta



Níveis da energia dum oscilador harmónico segundo a Mecânica ondulatória

(7) A equação (112) é então substituída pela seguinte:

$$u_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c_1}\left(\overline{E}_\nu - \frac{h\nu}{2}\right)d\nu\,.$$

Condições de quantificação

a) Consideremos ainda uma partícula de massa m sujeita a mover-se sôbre uma recta $O\ q$ entre dois pontos fixos A e B à distância l. A partícula reflecte-se sucessivamente nestes pontos e a cada reflexão a sua impulsão p muda simplesmente de sinal: $-\frac{1}{2} \leq q \leq +\frac{1}{2}, p = \pm p_n$. O espaço das fases é ainda o plano (p, q) mas as trajectórias são agora rectângulos de base l. (Figura seguinte). A condição de quantificação é

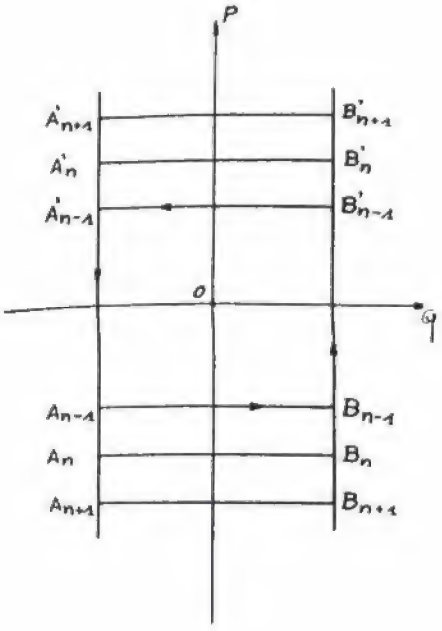
$$\int p dq = nh \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad \text{donde} \qquad p_n = \frac{nh}{2l} \tag{117}$$

A área do rectângulo $A_n B_n A'_n B'_n$ é nh e dois rectângulos correspondentes a dois valores sucessivos de n limitam uma área h formada de duas bandas de largura $\frac{nh}{2l}$.

A energia só pode tomar os valores

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8ml^2} \tag{118}$$

b) A partícula pode finalmente ter a liberdade de se deslocar no interior dum paralelopípedo de lados l_1, l_2, l_3 paralelos aos eixos Oq_1, Oq_2, Oq_3. A cada reflexão sôbre a face Oq_1, por exemplo, o momento p muda de sinal, de sorte que temos três condições de quantificação análogas a (117) e que são



$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{n_1 h}{2l_1} \qquad n_1 = 0, 1, 2 \ldots \\ p_2 &= \frac{n_2 h}{2l_2} \qquad n_2 = 0, 1, 2 \ldots \\ p_3 &= \frac{n_3 h}{2l_3} \qquad n_3 = 0, 1, 2 \ldots \end{aligned} \tag{119}$$

A trajectória cobre no espaço das fases uma superfície a 3 dimensões limitando um volume

$$8 p_1 p_2 p_3 l_1 l_2 l_3 = n_1 n_2 n_3 h^3 .$$

O volume de cada célula é h^3, pois $\Delta n_\alpha = \pm 1$. A energia total só pode tomar os valores

$$E_{n_1 n_2 n_3} = \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right) = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{n_1^2}{l_1^2} + \frac{n_2^2}{l_2^2} + \frac{n_3^2}{l_3^2}\right) \tag{120}$$

Duma maneira geral Planck enunciou a quantificação dos sistemas com s graus de liberdade tomando células do espaço das fases tôdas de grandeza h^s. As condições de quantificação de Wilson-Sommerfeld são

$$\int p_\alpha dq_\alpha = n_\alpha h \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, s\,.$$

Na teoria de Schrödinger as condições quânticas de Wilson-Sommerfeld são substituídas pelas condições de *aceitabilidade* das funções de onda.

Estas concepções têm um grande parentesco com o princípio da incerteza de Heisenberg. Segundo êste princípio não podemos definir as condições iniciais do movimento com uma precisão ilimitada; se cometermos um êrro Δp sôbre p e um êrro Δq sôbre q a precisão máxima corresponde a

$$\Delta p . \Delta q = h\,,$$

quere dizer precisamente a um domínio do plano das fases com as dimensões duma célula elementar.

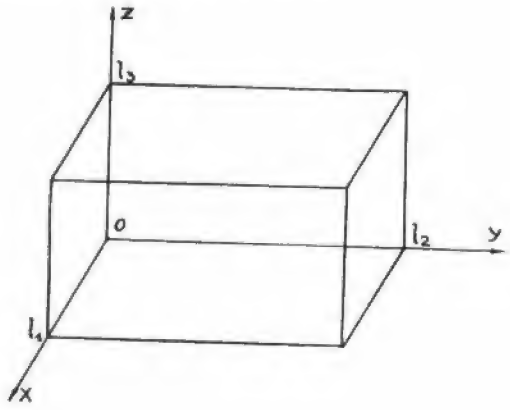
A Mecânica ondulatória de Luiz de Broglie associa como sabem a cada partícula uma onda que a guia e determina a sua trajectória. Êste terceiro problema conduz-nos assim naturalmente ao estudo da propagação de ondas num recinto paralelopipédico.

Distribuïção estatística do radiamento

Primeiro vamo-nos colocar no ponto de vista electromagnético e utilizar a lei da equipartição da energia para demonstrar a lei de Rayleigh-Jeans.

Sabemos ja que o equilíbrio entre a matéria e o radiamento contidos no interior dum recinto não depende da natureza nem da forma das parêdes do recinto. Podemos então para simplificar os cálculos, utilizar como fêz Lord Rayleigh um recinto paralelopipédico de parêdes perfeitamente conductoras e de arestas l_1, l_2, l_3.

Vamos tratar o problema do equilíbrio do radiamento unicamente, admitindo que as leis da Mecânica estatística se aplicam.



Características dum conductor perfeito

Vejamos primeiro as características dum condutor perfeito.

A primeira equação de Maxwell

$$K\frac{\delta\vec{E}}{\delta t}=c\ \text{rot}\,\vec{H}-\sigma\vec{E}$$

mostra que σ só será infinitamente grande se $\vec{E}$ for infinitamente pequeno. No interior dum condutor perfeito temos pois identicamente

$$\vec{E}=0$$

e por conseguinte

$$\frac{\delta\vec{E}}{\delta t}=0\,.$$

Por outro lado, se não há fôrças electromotrizes aplicadas, de origem térmica ou química por exemplo, a segunda equação de Maxwell

$$\mu\frac{\delta\vec{H}}{\delta t}=-c\ \text{rot}\ \vec{E}$$

dá

$$\frac{\delta\vec{H}}{\delta t}=0\,.$$

No interior dum condutor perfeito não há pois *nem campo eléctrico nem campo magnético variável.* Se existir um campo electromagnético exterior a superfície do condutor perfeito será de discontinuidade para o campo e cobrir-se-há duma densidade determinada de electricidade verdadeira e de fôlhas de corrente, densidade que tem por papel precisamente proteger o interior contra as perturbações exteriores. Portanto:

1) No interior dum condutor perfeito o campo eléctrico é nulo. Como a componente tangencial do deslocamento $\vec{D}$ é contínua sôbre a superfície o *campo eléctrico é normal à superfície.*
2) No interior dum condutor perfeito $\frac{\delta\vec{H}}{\delta t}=0$, de sorte que, pondo de parte o caso dum campo magnético constante: $\vec{H}=0$ *e* $\vec{B}=0$.

   A componente normal da indução $\vec{B}$ sendo contínua, *o campo magnético é tangencial à superfície do condutor perfeito.*
3) Daqui resulta que o vector de Poynting $c\left(\vec{E}\wedge\vec{H}\right)$ é paralelo a $\vec{J}$. No interior do condutor perfeito não penetra nem campo eléctrico, nem campo magnético, nem energia electromagnética.

Um condutor perfeito é um reflector perfeito das ondas electromagnéticas.
O nosso paralelopípedo cheio de radiamento é um sistema absolutamente isolado.

1°) *Raciocínio de Jeans*

Posto isto cada uma das grandezas eléctricas ou magnéticas, satisfaz à equação de propagação das ondas:

$$\text{lor.}\psi=\text{lap.}\psi-\frac{1}{c^2}\frac{\delta^2\psi}{\delta t^2}=0\,, \tag{121}$$

a função de onda ψ podendo ser um escalar ou um vector. Na mecânica ondulatória ψ representa a amplitude de probabilidade.

Aqui só nos vão interessar as soluções da forma $f(x,y,z)\varphi(t)$

O desenvolvimento em série de Fourier duma função arbitrária de x,y,z, satisfazendo a certas condições aos limites, fornece-nos uma fiada de termos da forma

$$Q_{\alpha\beta\gamma}\,{}^{\cos}_{sen}(\alpha x)\,{}^{\cos}_{sen}(\beta y)\,{}^{\cos}_{sen}(\gamma z)\,, \tag{122}$$

os coeficientes $Q_{\alpha\beta\gamma}$: sendo dados por relações conhecidas.

a) *Potencial escalar eléctrico*

Se ψ representa o potencial escalar eléctrico, podemos pôr $\psi = 0$ sôbre as faces do paralelopipedo; as condições aos limites são portanto

$$\psi = 0 \;\; sobre \;\; os \;\; planos \begin{cases} x = 0 & x = l_1; \\ y = 0 & y = l_2; \\ z = 0 & z = l_3; \end{cases} \tag{123}$$

ψ será então da forma

$$\psi_{n_1 n_2 n_3} = \sum_{n_1}\sum_{n_2}\sum_{n_3} Q_{n_1 n_2 n_3}\, sen\frac{n_1\pi x}{l_1}\, sen\frac{n_2\pi y}{l_2}\, sen\frac{n_3\pi z}{l_3}\,, \tag{124}$$

onde os $Q_{n_1 n_2 n_3}$ são funções do tempo. Os números n_1, n_2, n_3, são inteiros quaisquer e os somatórios estendem-se de zero a infinito.

Escrevendo que esta expressão satisfaz à equação de propagação, obtemos

$$\pi^2\left(\frac{n_1^2}{l_1^2} + \frac{n_2^2}{l_2^2} + \frac{n_3^2}{l_3^2}\right)Q_{n_1 n_2 n_3} + \frac{1}{c^2}\frac{\delta^2 Q_{n_1 n_2 n_3}}{\delta t^2} = 0\,,$$

de sorte que os Q são funções harmónicas do tempo com uma frequência

$$\nu = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{n_1}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{l_2}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{l_3}\right)^2}\,.$$

ψ toma então a forma

$$\psi_{n_1 n_2 n_3} = \sum_{n_1}\sum_{n_2}\sum_{n_3} Q_{0n}\, sen\frac{n_1\pi x}{l_1}\, sen\frac{n_2\pi y}{l_2}\, sen\frac{n_3\pi z}{l_3}\,{}^{\cos}_{sen}\, 2\pi\nu_n t\,, \tag{125}$$

Q_{0n} sendo constante e o índice n indicando por comodidade o grupo (n_1, n_2, n_3).

Esta solução representa uma sobreposição de ondas estacionárias; cada um dos termos do somatório corresponde a um dos modos possíveis de oscilação própria do recinto; ψ passa por zero ou atinge o seu máximo em todos os pontos no mesmo instante.

b) *Campo eléctrico*

O campo eléctrico $\vec{E}$ deve satisfazer à condição de ser normal às faces do paralelopipedo; por exemplo E_x deve anular-se para

$$\begin{cases} y = 0, \\ y = l_2; \end{cases} \quad \begin{cases} z = 0, \\ z = l_3; \end{cases} \quad mas \;\; n\,o \;\; para \;\; \begin{cases} x = 0, \\ x = l_1; \end{cases} \tag{126}$$

Como para o potencial teremos um desenvolvimento em série de Fourier da forma geral seguinte:

$$
\begin{aligned}
E_x &= \sum_{n_1}\sum_{n_2}\sum_{n_3} q_{xn} \cos\frac{n_1\pi x}{l_1}\, sen\frac{n_2\pi y}{l_2}\, sen\frac{n_3\pi z}{l_3}, \\
E_y &= \sum_{n_1}\sum_{n_2}\sum_{n_3} q_{yn} sen\frac{n_1\pi x}{l_1} \cos\frac{n_2\pi y}{l_2}\, sen\frac{n_3\pi z}{l_3}, \\
E_z &= \sum_{n_1}\sum_{n_2}\sum_{n_3} q_{zn} sen\frac{n_1\pi x}{l_1}\, sen\frac{n_2\pi y}{l_2} \cos\frac{n_3\pi z}{l_3}.
\end{aligned}
\tag{127}
$$

onde q_{xn} q_{yn} q_{zn} são funções harmónicas do tempo de freqüência ν_n por exemplo:

$$q_{xn} = q_{0xn} \cos(2\pi\nu_n t - \varepsilon_n)\,. \tag{128}$$

Como o campo eléctrico deve satisfazer em todo o ponto e em todo o instante à eqüação

$$div\vec{E} = 0$$

obtemos a condição

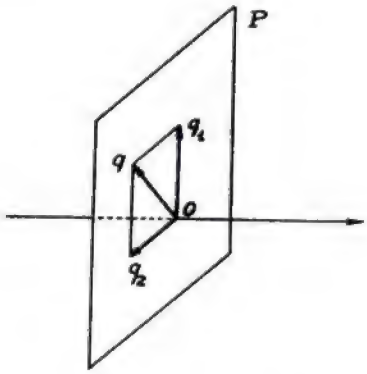
$$q_{xn}\frac{n_1}{l_1} + q_{yn}\frac{n_2}{l_2} + q_{zn}\frac{n_3}{l_3} = 0 \tag{129}$$

Se considerarmos q_{xn}, q_{yn}, q_{zn} como componentes dum vector $\vec{q}$ (eliminamos o índice por comodidade), a condição (129) atesta que êste vector jaz num plano P normal à recta de cosenos directores proporcionais a $\frac{n_1}{l_1}, \frac{n_2}{l_2}, \frac{n_3}{l_3}$.

Tomemos neste plano dois eixos rectangulares; o vector $\vec{q}$ pode decompor-se segundo êstes eixos:

$$\vec{q}_1 = \vec{q}_2 + \vec{q}_3 \tag{130}$$

Sejam $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ e $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ os cosenos directores dêstes eixos; se $\vec{q}_1$ e $\vec{q}_2$ jazem em P devemos ter



$$\alpha_1\frac{n_1}{l_1} + \beta_1\frac{n_2}{l_2} + \gamma_1\frac{n_3}{l_3} = 0$$

e

$$\alpha_2\frac{n_1}{l_1} + \beta_2\frac{n_2}{l_2} + \gamma_2\frac{n_3}{l_3} = 0\,. \tag{131}$$

A equação (130) escreve-se então

$$
\begin{aligned}
q_x &= \alpha_1 q + \alpha_2 q_2, \\
q_y &= \beta_1 q_1 + \beta_2 q_2, \\
q_z &= \gamma_1 q_1 + \gamma_2 q_2.
\end{aligned}
\tag{132}
$$

quere dizer, decompuzemos a oscilação polarizada numa direcção qualquer em duas oscilações polarizadas em direcções rectangulares. A cada uma destas oscilações corresponde um sistema de ondas electromagnéticas estacionárias cujos planos de onda são paralelos a *P*.

A direcção de propagação, normal a *P*, tem por cosenos directores $\frac{n_1}{l_1}, \frac{n_2}{l_2}, \frac{n_3}{l_3}$.

O campo eléctrico existe no plano de onda.

c) *Número de modos próprios de oscilação.*

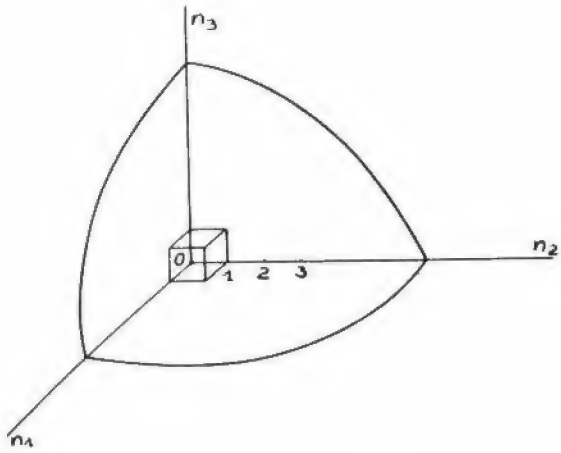
Calculemos o número de modos próprios de vibração do paralelopípedo. Cada modo corresponde a um terno de valores n_1, n_2 n_3 e a cada um destes ternos correspondem dois modos de vibração possíveis q_1 e q_2 polarizados em ângulo recto.

Tomemos três eixos ortogonais On_1, On_2, On_3; marquemos sôbre êles os valores *inteiros* e sucessivos dos números n_1, n_2, n_3, e suponhamos construída uma rêde paralelopipédica.

A cada vértice da rêde corresponde um modo possível de vibração. Na Mecânica ondulatória cada vértice da rede representa uma função de onda $\psi_{n_1 n_2 n_3}(x, y, z)$.

Para termos agora o número de frequências próprias compreendidas entre zero e um certo valor dado ν tal que

$$
\left(\frac{2\nu}{c}\right)^2 = \left(\frac{n_1}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{l_2}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{l_3}\right)^2, \tag{133}
$$



basta contar o número de pontos representativos de coordenadas inteiras (número de vértices da rêde) compreendidos no interior do elipsoide

$$
\frac{n_1^2}{\left(\frac{2\nu l_1}{c}\right)^2} + \frac{n_2^2}{\left(\frac{2\nu l_2}{c}\right)^2} + \frac{n_3^2}{\left(\frac{2\nu l_3}{c}\right)^2} = 1, \tag{134}
$$

Mas como obter o *número de frequências próprias compreendidas entre os limites* ν e $\nu + d\nu$?

Para isso faremos um pequeno artifício de raciocínio.

Se ν é suficientemente grande, então o número de vértices da rêde de coordenadas positivas (só êstes interessam) é igual ao número de células contidas no interior do primeiro octante, e êste número de células é igual a um oitavo do volume do elipsoide, visto que cada célula tem um volume igual à unidade, isto é

$$\frac{1}{8}\frac{4}{3}8\pi\frac{\nu^3}{c^3}l_1l_2l_3=\frac{4}{3}\pi\frac{\nu^3}{c^3}V \quad \text{com } V=l_1l_2l_3.$$

Como a cada terno (n_1, n_2, n_3) correspondem dois estados de polarização devemos multiplicar por dois êste resultado, e temos

$$\frac{8}{3}\pi\frac{\nu^3}{c^3}V.$$

Para termos agora o número de modos próprios de vibração, ou seja, o número de graus e liberdade, comprendidos entre ν e $\nu+d\nu$, diferenciamos a expressão precedente; obtemos

$$\frac{8\pi\nu^2}{c^3}Vd\nu, \tag{135}$$

e a lei de Rayleigh-Jeans começa a surgir.

Êste resultado vale para um recinto paralelopipédico, mas Weyl e Courant provaram que êle subsiste para um recinto de forma qualquer com a condição que as frequências sejam suficientemente grandes (comprimentos de onda pequenos em relação às dimensões do recinto).

As funções características que aparecem na nova expressão de ψ já não são naturalmente senos, mas funções que dependem da forma do recinto.

d) *Campo magnético.*

As expressões das componentes do campo magnético, satisfazendo às condições de tangência sôbre as paredes do recinto, escrevem-se imediatamente, mas a utilização da eqüação de Maxwell.

$$\frac{\delta\bar{H}}{\delta t}=-c\ rot\ \bar{E}$$

tem a vantagem de nos dar as relações entre os coeficientes. Obtém-se sem dificuldade

$$\begin{aligned}
H_x&=\sum_{n_1}\sum_{n_2}\sum_{n_3}h_{xn}\operatorname{sen}\frac{n_1\pi x}{l_1}\cos\frac{n_2\pi y}{l_2}\cos\frac{n_3\pi z}{l_3},\\
H_y&=\sum_{n_1}\sum_{n_2}\sum_{n_3}h_{yn}\cos\frac{n_1\pi x}{l_1}\operatorname{sen}\frac{n_2\pi y}{l_2}\cos\frac{n_3\pi z}{l_3},\\
H_z&=\sum_{n_1}\sum_{n_2}\sum_{n_3}h_{zn}\cos\frac{n_1\pi x}{l_1}\cos\frac{n_2\pi y}{l_2}\operatorname{sen}\frac{n_3\pi z}{l_3},
\end{aligned} \tag{136}$$

com

$$\begin{aligned}
h_{xn}&=\frac{c}{2\nu}\left(\frac{n_3}{l_3}(\beta_1\dot{q}_{10}+\beta_2\dot{q}_{20})-\frac{n_2}{l_2}(\gamma_1\dot{q}_{10}+\gamma_2\dot{q}_{20})\right)\operatorname{sen}(2\pi\nu_n t-\varepsilon_n),\\
h_{yn}&=\frac{c}{2\nu}\left(\frac{n_1}{l_1}(\gamma_1\dot{q}_{10}+\gamma_2\dot{q}_{20})-\frac{n_3}{l_3}(\alpha_1\dot{q}_{10}+\alpha_2\dot{q}_{20})\right)\operatorname{sen}(2\pi\nu_n t-\varepsilon_n),\\
h_{zn}&=\frac{c}{2\nu}\left(\frac{n_2}{l_2}(\alpha_1\dot{q}_{10}+\alpha_2\dot{q}_{20})-\frac{n_1}{l_1}(\beta_1\dot{q}_{10}+\beta_2\dot{q}_{20})\right)\operatorname{sen}(2\pi\nu_n t-\varepsilon_n),
\end{aligned} \tag{137}$$

Por outro lado a equação

$$div\ \vec{H} = 0\ ,$$

dá

$$h_{x0}\frac{n_1}{l_1} + h_{y0}\frac{n_2}{l_2} + h_{z0}\frac{n_3}{l_3} = 0\ , \tag{138}$$

que mostra existir também o campo magnético no plano de onda.

e) *Energia total*

A energia total é a soma da energia eléctrica e da energia magnética. Um cálculo longo mas simples conduz para a energia eléctrica a uma expressão que podemos pôr sob a forma

$$\frac{1}{2}\int E^2 d\tau = \frac{V}{16}\sum_{n_1}\sum_{n_2}\sum_{n_3} q_n^2\ , \qquad V = l_1 l_2 l_3 \tag{139}$$

o somatório triplo estendendo-se não só às $\frac{8\pi v^3}{3c^3}V$ frequências próprias mas também aos q_1^2 e q_2^2 pois

$$q_1^2 + q_2^2 = q_0^2\ .$$

Cálculos análogos conduzem a escrever a energia do campo magnético sob a forma

$$\frac{1}{2}\int H^2 d\tau = \frac{V}{16(2\pi v)^2}\sum_{n_1}\sum_{n_2}\sum_{n_3}\dot{q}_n^2 \tag{140}$$

A energia total toma assim a forma

$$\frac{V}{16}\sum_{n_1}\sum_{n_2}\sum_{n_3}\left(q_n^2 + \frac{1}{(2\pi v)^2}\dot{q}_n^2\right) \tag{141}$$

Comparemos esta expressão com a da energia total dum oscilador harmónico linear:

$$E = \frac{\alpha}{2}\left(q^2 + \frac{1}{(2\pi v)^2}\dot{q}^2\right),$$

Vemos que cada modo de vibração polarizada rectilineamente contribui para a soma (141) com uma energia que é idêntica à dum oscilador harmónico linear.

Dêste modo o interior dum recinto, que corresponde a um número $\frac{8\pi v^3}{3c^3}V$ de modos de vibração independentes, pode ser assimilado a um conjunto de outros tantos osciladores harmónicos, e estes osciladores, segundo a teoria electromagnética clássica, podem apresentar todos os graus contínuos de excitação.

Lorentz ([8]) mostrou que as leis de Electromagnetismo e as leis de Mecânica newtoniana se podem deduzir dum mesmo princípio hamiltoniano. Não admira pois que aplicando as equações do Electromagnetismo aos campos eléctrico e magnético dum modo qualquer de vibração do recinto obtenhamos uma equação da forma

$$\ddot{q} - (2\pi v)^2 q = 0\ , \tag{142}$$

([8]) C.R. do Congresso Solvay, 1912.

idêntica à que resulta da aplicação das leis da Mecânica newtoniana ao oscilador harmónico ordinário.

Para obtermos finalmente a lei de Rayleigh aplicamos a êste conjunto de osciladores o princípio da equipartição da energia.

Se a cada oscilador a lei confere uma energia média kT, os $\frac{8\pi\nu^2}{c^3}$ osciladores electromagnéticos com frequências compreendidas entre ν e $\nu+d\nu$ devem representar, por unidade de volume uma energia

$$\frac{8\pi\nu^2}{c^3}kTd\nu = u_\nu d\nu \text{ ergs } cm^{-3} \tag{143}$$

onde

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}kT \,. \tag{144}$$

É a lei de Raylegh-Jeans, que é bem da forma $\nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right)$.

Debije retomou estes raciocínios e aplicou-os a um recinto de forma esférica e depois de forma qualquer. O resultado obtido foi o mesmo.

A objecção mais séria que se pode fazer à lei de Rayleigh é que ela conduz a um valor infinito para a densidade total da energia, a qualquer temperatura; com efeito

$$\int_0^\infty u_\nu d\nu = \frac{8\pi kT}{3c^3}\int_0^\infty \nu^2 d\nu = \infty \,. \tag{145}$$

Vários foram os artifícios de raciocínio imaginados para fugir a esta conclusão. Lorentz em particular propôs limitar as frequências a um valor ν tal que o comprimento de onda fôsse da ordem das dimensões do electrão. Mas esta frequência é tal que as densidades de energia às temperaturas ordinárias são ainda grandes demais.

Podemos pois afirmar que o electromagnetismo clássico e incompatível com os factos experimentais, pois o resultado (145) é absolutamente inaceitável.

2.º) *Raciocínio de Planck*

Antes de abandonar o ponto de vista electromagnético vou mostrar que a lei de Rayleigh-Jeans se pode obter duma outra maneira estudando a energia média dum oscilador de Planck exposto à acção do radiamento.

Desta vez o oscilador de Planck será uma partícula electrizada de carga e e de massa m (electrão, ião, etc.) atraída para um centro fixo por uma fôrça proporcional à elongação x.

Se não houvesse emissão de energia a equação do movimento deste oscilador harmónico seria

$$m\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \,,$$

mas o oscilador, que possui uma aceleração γ, vai radiar segundo as leis da electrodinâmica clássica, a potência radiada sendo proporcional ao quadro da aceleração:

$$-\frac{\delta W}{\delta t} = \frac{e^2}{6\pi c^3}\gamma^2 \,, \tag{146}$$

e, como sabem, esta dissipação de energia provoca um amortecimento das oscilações.

Para satisfazer ao princípio da conservação da energia Lorentz introduziu uma *fôrça dissipativa* ou *reacção do radiamento,* constantemente aplicada

TEORIA, n.º 3 A/97 JAN. 98

à partícula, e escreve que o trabalho desta fôrça é igual à energia dissipada:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{R}|\vec{v}\,dt = -\frac{e^2}{6\pi c^3}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)^2 dt\,.$$

A partícula radia durante o intervalo t_2 - t_1 e nestes instantes $\gamma = 0$.

Uma integração por partes do segundo membro dá

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\vec{v}\left|\vec{R}\right.\right)dt = \frac{e^2}{6\pi c^3}\int_{t_1}^{t_2}\left(\vec{v}\left|\frac{\delta^2\vec{v}}{dt^2}\right.\right)^2 dt\,,$$

donde

$$\vec{R} = \frac{e^2}{6\pi c^3}\cdot\frac{\delta\dot{\gamma}}{\delta t}\,. \tag{147}$$

Esta fôrça suplementar é análoga a uma força viscosa

$$R = -g\dot{x}, \quad g = \omega_0^2\frac{e^2}{6\pi c^3} \tag{148}$$

sendo o coeficiente g que determina o amortecimento do oscilador.

Notem que as duas expressões (147) e (148) não são rigorosamente equivalentes, porque o oscilador pode tomar movimentos forçados com frequências angulares diferentes de ω_0; mas o amortecimento electro-magnético, como fácilmente se verifica, é extremamente fraco, o campo de ressonância é muito apertado, de sorte que o oscilador só vibra para freqüências muito vizinhas da sua própria freqüência. Podemos pois utilizar indiferentemente (147) ou (148).

Se vamos então considerar a possibilidade de absorção dum radiamento pelo oscilador devemos fazer intervir o seu campo eléctrico na direcção do deslocamento, e a equação completa do movimento será

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x - g\dot{x} + eE_x\,. \tag{149}$$

Procuremos a energia média do oscilador exposto ao radiamento.

O factor de amortecimento sendo extremamente fraco, não modificará a igualdade média da energia cinética e da energia potencial, de sorte que podemos tomar para valor médio da energia total

$$m\overline{v^2}\,. \tag{150}$$

Para termos $\overline{v^2}$ precisamos de determinar o campo eléctrico exterior que actua sôbre o oscilador. Se êste se acha no interior dum recinto contendo radiamento isotérmico, o campo eléctrico variará duma maneira desordenada, muito complicada, mas nós podemos sempre representá-lo por um desenvolvimento em série de Fourier, ou por um integral de Fourier.

Considerando o campo eléctrico E_x durante um intervalo de tempo muito grande θ, podemos escrever

$$E_n = \sum_1^{\infty}(n)A_n\cos\left(\frac{2\pi n}{\theta}t - \delta_n\right)\cdot \tag{151}$$

Cada um dos termos deste somatório representa uma perturbação harmónica de frequência

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{n}{\theta}\,, \tag{152}$$

de sorte que num intervalo de frequências $\Delta\upsilon$ vamos ter um número de harmónicas

$$\Delta n = \theta \Delta \nu \,. \tag{153}$$

Se suposermos que θ aumenta indefinidamente, as diversas frequências υ, múltiplos inteiros de $\frac{1}{\theta}$, vão-se aproximar indefinidamente umas das outras e a série transforma-se num integral de Fourier.

Dado o carácter linear das eqüações podemos substituir em (149) cada um dos termos de (151) e estudar em cada um dêstes casos o movimento do oscilador. O movimento total será a sobreposição dêstes movimentos simples.

Como a duração do regimen transitório é sempre muito curta, procuremos o regimen permanente substituindo o termo geral da série

$$E = A\cos(\omega t - \delta)\,,$$

prescindindo por ora dos índices. Obtemos

$$x = a\ \cos(\omega t - \delta - \varphi)\,,$$

com

$$a^2 = \frac{A^2 e^2}{m^2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + g^2\omega^2}$$

O valor médio de υ^2 será

$$\overline{\nu^2} = \overline{a^2\omega^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{A^2 e^2 \omega^2}{m^2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + g^2\omega^2}\,. \tag{154}$$

Para termos a energia total é preciso calcular $\overline{(\Sigma v)^2}$, mas os termos rectângulos em que intervém produtos de funções de duas frequências diferentes anulam-se, como sabem, e portanto

$$E = \sum_i m\overline{v^2} = \sum_{i\,(n)}^{\infty} \frac{1}{2}\cdot\frac{mA_n^2 e^2 \omega^2}{m^2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + g^2\omega^2} \tag{155}$$

Relacionemos agora esta energia média (155) com a densidade média da energia do radiamento incidente.

Ora a densidade da energia magnética do radiamento electromagnético é igual à densidade da energia eléctrica, de sorte que a densidade total da energia do radiamento é

$$E^2 = E_x^2 + E_y^2 + E_z^2\,.$$

Por outro lado, em virtude da isotropia, podemos escrever

$$\overline{E_x^2} = \overline{E_y^2} = \overline{E_z^2} = \frac{1}{3}\overline{E^2}\,,$$

e, como os termos rectângulos desaparecem, temos

$$\overline{E_x^2} = \frac{1}{2}\sum_n A_n^2\,. \tag{156}$$

A densidade da energia do radiamento exterior é pois

$$u = \frac{3}{2}\sum_i^{\infty} A_n^2\,. \tag{157}$$

Para obter à lei de Rayleigh-Jeans, Planck transforma este somatório no integral duma função contínua de υ. Vejamos como isso é possível. Com efeito, no cálculo de ΣA_n^2 se se passa dum termo A_k ao seguinte A_{k+1}, a variação de freqüência é

$$\Delta v = \frac{1}{\theta}; \tag{158}$$

podemos pois escrever a densidade de energia sob a forma

$$u = \frac{3\theta}{2} \sum_1^{\infty} A_n^2 \Delta v, \tag{159}$$

e se θ aumenta indefinidamente podemos substituir $\Delta\upsilon$ por $d\upsilon$.

Ora se considerarmos os A_n correspondentes a um pequeno intervalo de frequências $d\upsilon$, que contenha todavia um número muito grande de vezes $\frac{1}{\theta}$, estes A_n têm valores que podem diferir muito uns dos outros; portanto para podermos substituir o somatório por um integral duma função contínua de υ é necessário substituir os A_n^2 pelo seu valor médio tomado nêste intervalo. Teremos então

$$u = \frac{3\theta}{2} \int_0^{\infty} \overline{A_n^2} dv = \int_0^{\infty} u_v dv \tag{160}$$

pondo

$$u_v dv = \frac{3}{2} \overline{A_n^2} dv \tag{161}$$

Análogamente teremos agora para a energia total média (150) do oscilador exposto ao radiamento

$$\overline{E} = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} \frac{me^2 w^2 u_v dv}{m^2 \left(w_0^2 - w^2\right)^2 + g^2 w^2}, \tag{162}$$

mas sempre com a reserva expressa da completa incoerência da radiações. Planck invoca em seguida a extrema pequenez do coeficiente *g* para fazer um cálculo aproximado deste integral.

Como aquele coeficiente é relativamente muito pequeno o ressoador só será sensível à acção das radiações cujas frequências difiram muito pouco da sua própria freqüência. O máximo da função integranda será de tal modo agudo para $\omega = \omega_0$ que pràticamente podemos substituir em todos os termos ω por ω_0, excepto naturalmente em $\omega - \omega_0$. ([9])

([9]) Verifiquemos que o factor numérico $\alpha = \frac{g}{m\omega}$, sem dimensões, é muito pequeno em relação à unidade, por exemplo da ordem de 10^{-7}.

Temos

$$\alpha = \frac{\omega e^2}{6\pi m c^3} = \frac{e^2}{3\lambda m c^2}$$

Supondo o electrão esférico de raio r, com a carga uniformemente repartida à sua superfície, e utilizando a fórmula que dá a massa eléctromagnética temos

$$m = \frac{e^2}{6\pi r c^2},$$ (continua na pág. seguinte)

Quanto a u_ν a sua variação com ω é muito mais lenta e podemos substituí-la pelo valor constante correspondente a $\upsilon_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$. Esta simplificação dá

$$\overline{E} = \frac{me^2 u_{\nu_0}}{3g^2} \int_0^\infty \frac{dv}{\frac{4m^2}{g^2}(w - w_0)^2 + 1} \cdot \tag{163}$$

Fazendo

$$y = \frac{2m}{g}(\omega - \omega_0),$$

vem

$$\overline{E} = \frac{c^3 u_{\nu_0}}{8\pi^2 \nu_0^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi}{1 + y^2} \cdot$$

donde

$$\overline{E} = u_\nu \frac{c^3}{8\pi\nu^2} \cdot \tag{164}$$

Ora a lei de equipartição da energia, que é uma conseqüência da Mecânica estatística clássica concede ao nosso ressoador uma energia média a kT, portanto

$$\overline{E} = kT = u_\nu \frac{c^3}{8\pi\nu^2},$$

donde

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT, \tag{165}$$

que é a lei de Rayleigh-Jeans.

Em resumo: *o primeiro método de raciocínio, de Jeans, consiste em aplicar a estatística clássica aos diferentes modos próprios de vibração electromagnética dum recinto; o segundo método de raciocínio, de Planck, consiste em aplicar a estatística clássica aos osciladores materiais; ambos os métodos dão o mesmo resultado, porque em ambos intervêm osciladores, e ambos conduzem à lei de Rayleigh-Jeans incompatível com os factos experimentais.*

Aplicação duma estatística discontínua ao electromagnetismo clássico

a) *Ainda a hipótese de Planck*

Da análise minuciosa de todas as demonstrações da lei de Rayleigh resultou a convicção de que esta incompatibilidade era uma consequência fatal das leis do Electromagnetismo e da Mecânica estatística clássica.

Planck foi o primeiro a compreender que as dificuldades só desapareciam renunciando à continuïdade da sucessão dos estados de energia.

---

e por consequência

$$\alpha = \frac{2\pi r}{\lambda} \cdot$$

Ora r é da ordem de 10^{-13} cm, e, mesmo para o ultravioleta, λ é superior a 10^{-5}; portanto α é de ordem inferior a 10^{-7}.

Numa primeira fase da teoria Planck admite que os seus osciladores são incapazes de reagir com quantidades *arbitràriamente pequenas* de energia radiante; é necessário que a energia atinja um certo valor *finito* ε para que os osciladores materiais possam emiti-la ou absorvê-la.

Isto equivalia a abandonar a equipartição da energia pois, nesta ordem de ideias, um oscilador podia não possuir energia nenhuma.

Mas Planck para se afastar o menos possível da estatística clássica, a-fim de conservar aos elementos de igual volume do espaço das fases uma igual probabilidade "à priori", admite como já vimos anteriormente, que as variações bruscas de energia são múltiplos inteiros duma unidade, dum *quantum* ε: se n é um número inteiro, a energia dum estado possível dum oscilador é:

$$E_n = n\varepsilon$$

b) *Nova expressão da energia média dum oscilador*

Com esta hipótese, profundamente revolucionária, Planck deduz uma nova expressão da energia média dum oscilador, e obtém uma lei de repartição espectral do radiamento que concorda excelentemente com a experiência.

Consideremos um número muito grande N de osciladores tendo cada um uma freqüência determinada, e admitamos com Planck que a sua energia só pode variar por *quanta* ε. Sendo U a energia total, a energia média dum oscilador será

$$\overline{E} = \frac{U}{N}, \tag{166}$$

e o número de grãos de energia

$$P = \frac{U}{\varepsilon} = N\frac{\overline{E}}{\varepsilon} \tag{167}$$

O problema de estatística que então se põe é o seguinte: *distribuir os P grãos de energia pelos diferentes osciladores, que por hipótese só podem tomar os estados energéticos*

$$0,\ 1\varepsilon,\ 2\varepsilon, \ldots\ n\varepsilon \ldots \tag{168}$$

e procurar a distribuição mais provável

Para esquematizar assimilaremos cada um dêstes estados a uma célula na qual poderemos colocar um ou mais osciladores. Uma repartição determinada será caracterizada pelos números

$$N_0,\ N_1,\ N_2, \ldots\ N_n \ldots \tag{169}$$

de osciladores, a que correspondem respectivamente as energias (168). Atribuindo uma individualidade a cada oscilador a distribuição (169) pode ser obtida de

$$\Pi = \frac{N!}{N_0!\ N_1! \ldots\ N_n! \ldots}$$

maneiras diferentes, e, se procurarmos a distribuição que torna máximo Π, com as condições evidentes

$$\Sigma\ N_n = N,$$

e

$$\Sigma n\varepsilon N_n = U \quad \text{ou} \quad \Sigma n N_n = P. \tag{170}$$

obtemos por um raciocínio já conhecido:

$$N_n = Ae^{-n\beta/k}, \tag{171}$$

a constante A determinando-se pela primeira condição (170).

A constante β deve evidentemente ser igual a kT a-fim-de que esta estatística discontínua concorde com a estatística das moléculas submetidas á agitação térmica.

Noutros termos a relação

$$\beta = \frac{1}{kT},$$

válida na estatística clássica, valerá ainda, em virtude do *Princípio de correspondência*, para grandes números quânticos; mas sendo independente do número quântico, uma vez verificada para grandes números quânticos, valerá ainda para números quânticos quaisquer.

A probabilidade dum oscilador, em equilíbrio térmico, se achar no estado n, será então

$$\Pi_n = \frac{N_n}{N} = \frac{e^{-\frac{n\varepsilon}{kT}}}{\Sigma e^{-\frac{n\varepsilon}{kT}}}. \tag{172}$$

e a nova expressão da energia média dum oscilador

$$\overline{E} = \frac{U}{N} = \Sigma n\varepsilon\Pi_n = \frac{\varepsilon\Sigma n e^{-\frac{n\varepsilon}{kT}}}{\Sigma e^{-\frac{n\varepsilon}{kT}}}. \tag{173}$$

Ora denominador figura a soma duma progressão geométrica que se calcula em termos finitos:

$$\sum_0^\infty e^{-\frac{n\varepsilon}{kT}} = \frac{1}{1-e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}},$$

quanto ao numerador ele é simplesmente, à-parte o sinal, a derivada do denominador em ordem a $\frac{\varepsilon}{kT}$:

$$\sum_0^\infty n e^{-\frac{n\varepsilon}{kT}} = \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}}{\left(1-e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\right)^2}$$

de sorte que

$$\overline{E} = \varepsilon\frac{e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}}{1-e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}} = \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}}-1} \tag{174}$$

c) *Lei de Planck*

A expressão da densidade u_ν da energia dada por (164) em função da energia média dum oscilador (174) é agora

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\,\frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}}-1}, \tag{175}$$

e, se se deseja obter uma lei conforme à lei de Wien

$$u_\nu = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right),$$

é necessário que ε seja proporcional à frequência ν do oscilador.

Ora o estudo da energia dum oscilador harmónico linear mostrou-nos (114) que o coeficiente de proporcionalidade entre o *quantum* ε de energia e os elementos h de igual extensão em fase que lhe correspondem é precisamente a frequência ν do oscilador.

Pondo então

$$\varepsilon = h\nu ,$$

vem

$$\overline{E} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} , \tag{176}$$

e obtemos finalmente a notabilíssima *fórmula de Planck:*

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} . \tag{177}$$

d) Raciocínio de Debije

Debije em vez de aplicar esta estatística discontínua aos osciladores aplica-a aos sistemas de ondas estacionárias no interior dum recinto. Neste caso são as ondas estacionárias de Jeans que representam o papel de células pelas quais se repartem os osciladores. Seguindo uma via exactamente paralela Debije obtem para estes osciladores electromagnéticos, na distribüição mais provável, uma densidade de energia dada por (175). Para obter a lei de Wien é necessário fazer $\varepsilon = h\nu$ o que conduz de novo à fórmula de Planck (177).

e) A distribuïção mais provável é satisfeita pela quási totalidade das complexões possíveis.

Quando demonstrámos a lei de distribuição de Boltzmann-Gibbs procurámos a distribuïção mais provável e considerámos o logaritmo da probabilidade desta distribuição como proporcional à entropia *S*. Exprimamos agora o logaritmo da probabilidade máxima em função de *N* e de *P*, ou em função de *A* e de β.

Temos primeiro

$$N = A\Sigma e^{-n\beta\varepsilon} = \frac{A}{1 - e^{-\beta\varepsilon}} ,$$

e

$$P = \Sigma n N_n = \frac{A e^{-\beta\varepsilon}}{\left(1 - e^{-\beta\varepsilon}\right)^2} .$$

Dividindo membro a membro vem

$$\frac{P}{N} = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} - 1} ;$$

donde

$$e^{\beta\varepsilon} = \frac{N + P}{P} ,$$

e

$$A = N\left(1 - e^{-\beta\varepsilon}\right) = \frac{N}{N + P} .$$

Calculemos agora *log* Π; temos

$$\begin{aligned}\log\Pi &= N\log N - \Sigma N_n \log N_n \\ &= N\log N - A\Sigma e^{-n\beta\varepsilon}(\log A - \log n\beta\varepsilon) \\ &= N\log N - N\log A + \beta\varepsilon P \\ &= N\log N - N\log A + P\log\frac{P+N}{P} \\ &= N\log N - N\log\frac{N^2}{N+P} + P\log\frac{P}{N+P}\end{aligned}$$

e finalmente

$$\log\Pi = (N+P)\log(N+P) - N\log N - P\log P\,. \tag{178}$$

Em vez de procurarmos o número de complexões que correspondem à distribuïção mais provável e de tomarmos o seu logaritmo, podemos procurar o *número total* de complexões compatíveis com as ligações (170) impostas ao conjunto.

Fixemos a cada um dos *N* ressoadores uma etiqueta e distribuamos por êles as *P* unidades de energia. Êstes grãos de energia *sem individualidade,* vão tomar a etiqueta do ressoador a que pertencem. Distribuir os grãos de energia equivale pois a atribuir uma etiqueta a cada grão.

Uma dada complexão corresponderá a uma certa maneira de distribuir as diversas etiquetas e duas complexões só se diferenciarão pelo número de cada espécie de etiquetas.

O número de complexões será igual ao número de combinações completas dos *N* ressoadores tomados *P* a *P*:

$$\Pi' = \frac{(N+P-1)!}{(N-1)!\,P!}\,. \tag{179}$$

Se *N* e *P* são muito grandes, podemos despresar a unidade em face de *N* e *N+P*, e *a distribuição mais provável é de tal modo a mais provável que o número de complexões que lhe correspondem é pràticamente igual ao número total de complexões possíveis.* De facto despresando a unidade em face de N e $N + P$ e utilizando a fórmula simplificada de Stirling obtemos

$$\log\Pi' = (N+P)\log(N+P) - N\log N - P\log P \tag{180}$$

que é idêntica a (178).

Quere dizer, *tanto faz considerar o número de complexões correspondentes à distribuição mais provável como considerar o número total de complexões e tomar o logaritmo.*

f) *Outra dedução da energia média dum oscilador*

Calculemos a entropia *S* a partir de (180); temos

$$S = k\log\Pi' = k\big((N+P)\log(N+P) - N\log N - P\log P\big)\,; \tag{181}$$

mas como

$$\frac{P}{N} = \frac{\overline{E}}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{U}{N}\,,$$

vem

$$S = kN\left\{\left(1+\frac{\overline{E}}{\varepsilon}\right)\log\left(1+\frac{\overline{E}}{\varepsilon}\right) - \frac{\overline{E}}{\varepsilon}\log\frac{\overline{E}}{\varepsilon}\right\},$$

fórmula devida também a Planck.

TÉCNICA, n.º 3 / 97 JAN 98

Utilizemos a relação entre a energia média $\overline{E}$ e a temperatura T.

Se fizermos variar a energia total U, a energia média $\overline{E}$ variará, e se não houver trabalho exterior será

$$\frac{1}{T} = \frac{\delta S}{\delta U}.$$

Para um único oscilador teremos então uma entropia $s = \frac{S}{N}$ tal que

$$\frac{1}{T} = \frac{\delta S}{\delta \overline{E}} = \frac{R}{\varepsilon} \log\left(1 - \frac{\varepsilon}{\overline{E}}\right),$$

donde tiramos para a energia média dum oscilador

$$\overline{E} = \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1}, \tag{182}$$

que coincide com (174).

Para satisfazer à lei de Wien devemos finalmente fazer $\varepsilon = h\nu$.

Êste segundo método em que tomámos o número total de complexões compatíveis com as ligações impostas conduz pois, em virtude da enormidade dos números N e P, ao mesmo resultado que o primeiro método que consiste em tomar o número de complexões da distribuição mais provável ([10]).

Esta expressão da energia média dum oscilador pode ainda obter-se doutras maneiras que, em princípio não diferem da precedente. Encontram-se na memória que Planck apresentou ao Congresso Solvay em 1912.

Finalmente há ainda um outro método de Darwin e Fowler, ([11]) baseado sôbre a aplicação dos métodos de integração das funções de variável imaginária e que permite generalizar êstes métodos de estatística; mas não insistirei.

Comparação dos resultados

a) É interessante comparar êste resultado com o fornecido pela teoria clássica:

$$\overline{E}_{cl} = kT \tag{183}$$

$$\overline{E}_{qu} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \tag{184}$$

Para temperaturas muito elevadas, tais que $\frac{k\nu}{kT} \ll 1$, podemos desenvolver em série o denominador de (184) e limitarmo-nos ao segundo termo; neste caso

$$\overline{E}_{qu} = \frac{h\nu}{\frac{h\nu}{kT}} = kT \tag{185}$$

e os resultados clássico e quântico coincidem.

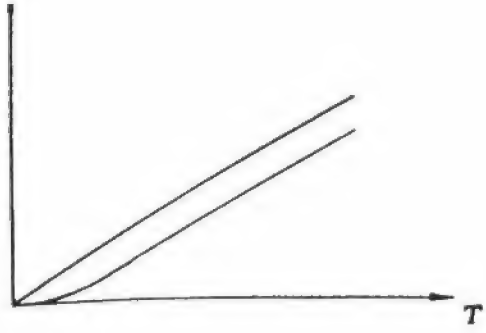
Mas às baixas temperaturas as divergências são importantes. A figura ao lado que representa E em função de T ilustra estas divergências.

([10]) Compare com os métodos dos conjuntos canónicos e microcanónicos.

([11]) Darwin e Fowler – Phil. Mag., 1922.

As diferenças são muito nítidas para temperaturas da ordem de grandeza ou inferiores a

$$T_0 = \frac{h\nu}{k}.$$



b) Conservando a fórmula

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\overline{E} \tag{186}$$

a que chegamos quer pelo estudo dum conjunto de osciladores harmónicos materiais, quer pelo estudo dos diferentes modos próprios de oscilação dum recinto de parêdes condutoras, mas introduzindo a hipótese dos quanta de energia, obtivemos para a energia média $\overline{E}$ dum oscilador em equilíbrio térmico não a expressão clássica (183), mas a expressão nova (184), e substituindo esta nova expressão de $\overline{E}$ em (186) obtivemos finalmente não a fórmula de Rayleigh-Jeans

$$u(\nu,T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}kT, \tag{187}$$

mas a fórmula de Planck

$$u(\nu,T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\cdot\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}. \tag{188}$$

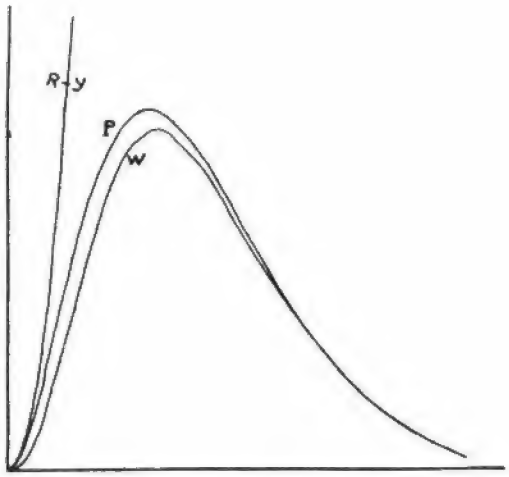
Se $\frac{h\nu}{kT} \ll 1$ é-se conduzido, como vimos, ao valor $\overline{E} = kT$ e em seguida à fórmula de Rayleigh; mas se supõe que $\frac{h\nu}{kT} \gg 1$ então obtém-se $\overline{E} = h\nu e^{-\frac{h\nu}{kT}}$ que substituída em (186) conduz não à fórmula de Planck, mas a uma fórmula que tinha sido proposta por Wien em 1896:

$$u(\nu,T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}h\nu e^{-\frac{h\nu}{kT}}. \tag{189}$$

A figura ao lado, que se obteve marcando em abcissas a variável $x = \frac{h\nu}{kT}$ e em ordenadas as energias, dá a apresentação gráfica destas três fórmulas.

A diferença característica está em que segundo a fórmula de Rayleigh a energia cresce indefinidamente com a freqüência, enquanto que segundo as fórmulas de Wien e de Planck a energia passa por um máximo e tende em seguida rápidamente para zero. O máximo da lei de Wien acha-se situado em relação ao da lei de Planck do lado das grandes freqüências.

A energia dada pela lei de Wien é sempre inferior à energia dada pela lei de Planck e esta sempre inferior à energia dada pela lei de Rayleigh.



Confirmações experimentais da lei de Planck

a) *Poder emissivo do corpo negro.*

A fórmula de Planck recebeu numerosas confirmações experimentais, e um ponto importante estava em deduzir da sua confrontação com a experiência os valores das constantes numéricos que nela figuram. Na expressão destas constantes, de parte k e c, só a constante h era desconhecida. A determinação de h fez-se medindo a uma temperatura determinada o poder emissivo do corpo negro, que se acha ligado por uma relação simples à densidade u da energia do radiamento.

A lei de Planck satisfaz à lei de Stefan, que obtivemos por raciocínios puramente termodinâmicos. Com efeito calculemos a densidade $u(T)$ da energia, de tôdas as freqüências, contida no recinto. Temos

$$u(T)=\int_0^\infty u(\nu,T)d\nu=\frac{8\pi}{c^3}\int_0^\infty\frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}d\nu=\frac{8\pi k^4T^4}{c^3h^3}\int_0^\infty\frac{x^3dx}{e^x-1},$$

fazendo $\frac{h\nu}{kT}=x$. Ora o valor dêste integral definido é $\frac{\pi^4}{15}$ e portanto

$$u(T)=\frac{8\pi^5k^4}{15c^3h^3}T^4=a\ T^4\cdot \tag{190}$$

É precisamente a lei de *Stefan-Boltzmann* (13) que concorda òptimamente com a experiência.

Como a é dado pelas medidas do poder emissivo do corpo negro:

$$a=7{,}624\times10^{-15}ergs\ cm^{-3}seg^{-1}grau^{-4},$$

podemos tirar o valor numérico da constante h suposta conhecida a constante k dos gases perfeitos.

Supondo desconhecida a constante k podemos recorrer às determinações espectrofotométricas do máximo de $u(\nu,T)$ a cada temperatura.

Igualando a zero a derivada de (188) em ordem a ν obtem-se fàcilmente

$$\frac{\nu_{max}}{T}=\alpha\frac{k}{h}=5{,}8\times10^{10}\cdot \tag{191}$$

que é a *lei do deslocamento de Wien*. A constante α é a raiz positiva não nula da equação transcendente

$$(3-\alpha)e^{\alpha}=3,$$

e o seu valor é

$$\alpha = 2{,}77 \text{ aprox.}$$

As relações (190) e (191) dão para k um valor que coincide com os seus valores obtidos por outros métodos:

$$k = 1{,}37 \times 10^{-16} ergs\ grau^{-1};$$

e para h

$$h = 6{,}55 \times 10^{-27} ergs\ seg.$$

b) *Teoria dos calores específicos*

Einstein obteve uma outra confirmação importante dos resultados de Planck na teoria dos calores específicos.

Einstein mostrou que a expressão da energia média dum oscilador linear de freqüência, ν e em equilíbrio térmico à temperatura T:

$$\overline{E} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \tag{192}$$

permite representar as variações do calor específico dos sólidos com a temperatura. ([12])

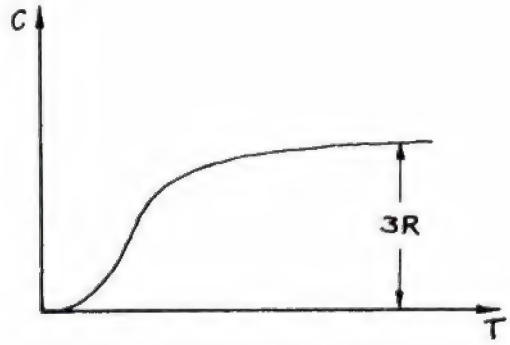
Se admitirmos que um átomo grama dum corpo simples no estado sólido contém N osciladores espaciais (3 graus de liberdade) sensìvelmente monocromáticos, e se a cada um dêstes graus de liberdade cabe em média uma energia (192), o calor atómico do corpo considerado será

$$C_v = \frac{\delta}{\delta T}\left(\frac{3Nh\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\right) = \frac{3Ne^{\frac{h\nu}{kT}}\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)^2}. \tag{193}$$

Êste calor atómico tende para zero quando a temperatura tende para zero, contràriamente ao resultado da teoria clássica:

$$\overline{E} = \frac{1}{2}kT \qquad C_v = \frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{6}{2}NkT\right) = 3R \tag{194}$$

segundo o qual o calor atómico é constante (lei de Duloug e Petit).



A lei de Einstein é confirmada pela experiência em primeira aproximação: as experiências de Nernst indicam uma variação mais lenta do que a indicada por (193).

([12]) C. R. do Cong. Solvay 1912, pág. 411.

P. Debije fêz a análise dos modos de vibração dos elementos duma rêde cristalina no estado sólido usando dum raciocínio análogo ao de Rayleigh e Jeans para um recipiente paralelopipédico cheio de radiamento, e conseguiu decompôr o espectro atribuindo cada freqüência a um oscilador determinado. Em seguida limita o espectro das ondas elásticas correspondentes a um comprimento de onda igual às distâncias médias dos átomos no cristal. Aplicando então a êste conjunto de osciladores a fórmula (192) de Planck obtem resultados que concordam tão exactamente quanto possível com os factos experimentais.

Mas êstes estudos saiem fóra do quadro destas lições.

A teoria das fluctuações e os "Licht-quanten"

No desenvolvimento da sua teoria Planck procurou conservar o mais possível as idéas clássicas, mas as confirmações "à posteriori", das suas novas concepções não justificavam de forma nenhuma os seus raciocínios que eram e são, como muitas vezes se tem dito, com mais ou menos consciência do que se diz, destituídos de lógica interna.

Por um lado utiliza os resultados da teoria electromagnética e por outro lado uma estatística inteiramente nova incompatível com aquela continuidade da estructura do radiamento que presupõe o electromagnetismo clássico. Assim, por exemplo, consideremos um pequeno volume V cheio de radiamento constituído pela juxtaposição de

$$\frac{8\pi\nu^2}{c^3}Vd\nu$$

modos de vibração própria em todo o intervalo de freqüência $d\nu$; por um lado admitimos que a êstes modos de vibração correspondem energias que só podem ser múltiplos inteiros do quantum $h\nu$, e por outro lado supomos que a distribuïção da energia do radiamento é contínua. Êste ponto de vista teve de ser abandonado, e nós vamos ver presentemente as razões que Einstein tirou do estudo das fluctuações para transformar a teoria.

Concebamos num recinto cheio de radiamento, em equilíbrio com as parêdes à temperatura T, um pequeno volume V. O valor médio da energia contida em V e correspondente à banda da freqüência $d\nu$ é

$$\overline{E} = Vu_\nu d\nu\,; \tag{195}$$

mas o valor instantâneo E desta energia afasta-se a cada instante do seu valor médio de sorte que vamos ter fluctuações irregulares de amplitude

$$\varphi = E - \overline{E} \tag{196}$$

e cujo quadrado médio pode ser calculado pela fórmula já estabelecida

$$\overline{\varphi^2} = kT^2\frac{d\overline{E}}{\delta T}\,.$$

Considerando primeiramente a lei de Rayleigh-Jeans, temos

$$\overline{E} = Vu_\nu d\nu = V\frac{8\pi\nu^2}{c^3}kTd\nu$$

e portanto

$$\overline{\varphi^2} = V\frac{c^3}{8\pi\nu^2}u_\nu^2 d\nu = \frac{c^3}{8\pi\nu^2 d\nu}\cdot\frac{\overline{E^2}}{V}\,.$$

Considerando em seguida a lei rial de Planck, temos

$$\overline{E} = V\frac{8\pi\nu^2}{c^3}\cdot\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}d\nu\,,$$

e portanto

$$\overline{\varphi^2} = V\frac{8\pi\nu^2}{c^3}\left(\frac{h^2\nu^2 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} - \frac{h^2\nu^2 d\nu}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}}-1\right)^2}\right),$$

que se pode pôr sob a forma

$$\overline{\varphi^2} = h\nu\overline{E} + \frac{c^3}{8\pi\nu^2 d\nu}\cdot\frac{\overline{E^2}}{V}\,. \qquad (197)$$

O resultado dêste cálculo é muito curioso porque faz aparecer dois termos distintos, um proporcional a $\overline{E}$ e o outro a $\overline{E^2}$.

O segundo termo não corresponde a nada de novo; é o mesmo que obtivemos com a lei de Rayleigh: representa o resultado das teorias clássicas e as fluctuações que dêle resultam são devidas à natureza ondulatória do radiamento. Com efeito, em cada ponto do volume V cruza-se a cada instante um grande número de ondas de freqüência ν dirigidas em todos os sentidos e cujas fases apresentam valores quaisquer. Estas ondas interferem e formam uma rêde caprichosa de ondas estacionárias que se modifica a cada instante. Duas ondas com a mesma freqüencia e de amplitudes a_1 e a_2 dão interferências cuja intensidade (energia por unidade de volume) é ora $(a_1+a_2)^2$ ora $(a_1-a_2)^2$ ora um valor qualquer compreendido entre êstes dois; em média o seu valor será $\overline{a_1^2}+\overline{a_2^2}$. Vê-se pois que se as amplitudes a_1 e a_2 forem multiplicadas por um factor s a energia média virá multiplicada por s^2; as fluctuações de energia variarão também como s^2, e o seu quadrado aumentará proporcionalmente a s^4, quere dizer a $\overline{E^2}$. Êste raciocínio pode aplicar-se a uma banda de freqüência $d\nu$, e entrando no detalhe dos cálculos podemos obter mesmo o coeficiente numérico de $\overline{E^2}$.

Mas como interpretar o primeiro têrmo de (197)?

Êste têrmo, como vão ver, conduz duma maneira muito simples à teoria dos *Licht-quanten* de Einstein.

Concebamos o radiamento como corpuscular e *composto de quanta de grandeza $h\nu$ independentes uns dos outros.*

Tratemos estes grãos de energia como átomos dum gaz cujas posições variam incessantemente segundo as leis do acaso, e admitamos que o número dêstes quanta sofre flutuações análogas às que sofre o número de moléculas contidas numa pequena parte do volume total.

Seja $\overline{N_\nu}$ calculado para um único e mesmo sistema considerado durante um tempo muito longo, ou para um grande número de sistemas idênticos considerados num mesmo instante, o número médio de fotões de freqüência ν, a menos $d\nu$ contidos no elemento de volume V do recinto; êles representam uma energia $\overline{E} = \overline{N_\nu}h\nu$.

Mas o valor rial de N_ν, desvia-se a todo o instante de $\overline{N_\nu}$, de sorte que vamos ter fluctuações $\Delta N_\nu = N_\nu - \overline{N_\nu}$. Em virtude dum teorema de Bernouilli da teoria das probabilidades a fluctuação quadrática média será

$$\overline{(\Delta N_\nu)^2} = \overline{(N_\nu - \overline{N_\nu})^2} = \overline{N_\nu}\,,$$

e portanto

$$\overline{\varphi^2} = \overline{N_\nu} h^2 \nu^2 = \overline{E} h\nu \cdot$$

quere dizer precisamente o primeiro têrmo de (197). Este têrmo corresponde pois à concepção balística do radiamento.

Em resumo, *a flutuação quadrática média deduzida da lei de Planck, considerada como experimental, é formada de duas partes, a primeira corresponde a um radiamento formado de quanta $h\nu$ independentes, a segunda corresponde a um radiamento puramente ondulatório.*

A lei de Wien, que podemos obter colocando-nos no ponto de vista puramente descontínuo, e que é exacta na região das altas freqüencias, só dá, como já vamos ver, o primeiro têrmo; a lei de Rayleigh, conforme ao electromagnetismo e válida para as baixas freqüências, só dá o segundo têrmo; a lei de Planck, válida em tôda a extensão do espectro, dá os dois termos: existe pois necessariamente uma ligação entre as ondas e os corpúsculos de luz; no dia em que Planck descobriu a sua lei impôs-se a síntese da Dinâmica e da Óptica, que no caso mais geral é o objecto da Mecânica ondulatória. Na realidade a tentativa de síntese só foi feita 25 anos mais tarde por Luiz de Broglie.

Aplicação da estatística clássica ao gaz de luz (de Broglie)

Admitamos que o radiamento seja constituído por fotões, isto é por átomos de energia que se deslocam em tôdas as direcções com a mesma velocidade c. Cada átomo terá uma energia $h\nu$ e uma quantidade de movimento $\frac{h\nu}{c}$. O equilíbrio estatístico dêste gaz é realizado pelas acções mútuas dos seus átomos que em tôdas as emergências conservam uma individualidade.

Êste gaz de átomos de luz em equilíbrio com a matéria pode de certo modo ser assimilado a um vapor saturado em presença da sua fase condensada.

Sendo dado um certo número de fotões, com uma energia total determinada, vejamos como é que êles se distribuem pelos diferentes estados de energia, ou, o que é o mesmo, pelas diferentes freqüências.

Aplicando ao conjunto a lei de distribuïção canónica, obtemos para o número N_ν de átomos de luz contidos no elemento de volume $d\Omega$ e cujas energias estão compreendidas entre $h\nu$, e $h(\nu+d\nu)$:

$$N_\nu = Ce^{-\frac{h\nu}{kT}} d\Omega \,. \tag{198}$$

A teoria electromagnética conduz a um elemento $d\Omega$ da extensão em fase proporcional ao número de modos de vibração própria do recinto de volume V, que para o mesmo intervalo de freqüência é

$$d\Omega = V\frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu \cdot \tag{199}$$

Êstes modos de vibração são considerados como igualmente prováveis "à priori".

Substituindo vem

$$N_\nu = CV\frac{8\pi\nu^2}{c^3} e^{-\frac{h\nu}{kT}} d\nu \tag{200}$$

e

$$u_\nu d\nu = \frac{N_\nu h\nu}{V} = C\frac{8\pi\nu^2}{c^3} h\nu e^{-\frac{h\nu}{kT}} d\nu \cdot \tag{201}$$

É a *lei de Wien*, forma limite da lei de Planck quando se supõe que $\frac{h\nu}{kT}$ é muito grande em face da unidade. Isto não é para extranhar, porque tendo considerado os movimentos dos átomos de luz como os das moléculas dum gaz, completamente independentes, devíamos necessàriamente chegar a uma lei cujo factor exponencial seria idêntico ao da lei de Maxwell.

Aplicando a esta lei de Wien a teoria das flutuações obtemos o primeiro termo deduzido da lei de Planck; com efeito

$$\overline{(\varphi)^2} = kT^2 \frac{\delta \overline{E}}{\delta T} = CV \frac{8\pi\nu^2}{c^3} h^2 \nu^2 e^{-\frac{h\nu}{kT}} d\nu$$

$$= N_\nu h^2 \nu^2 .$$

Em conclusão, *aplicando a estatística clássica à concepção contínua da luz obtemos a lei de Rayleigh, válida para pequenos valores de* $\frac{h\nu}{kT}$ *; aplicando a mesma estatística à concepção discontínua obtemos a lei de Wien, válida para grandes valores de* $\frac{h\nu}{kT}$ *; ambas são formas degeneradas da lei exacta de Planck, válida em toda a extenção do espectro, e que foi obtida inicialmente aplicando à concepção contínua uma estatística discontínua.*

Demonstração da lei de Wien (Ponto de vista de Bose)

A maneira como está redigida esta conclusão sugere naturalmente esta pergunta:

Não será possível imaginar uma estatística discontínua (diferente da de Planck) *que aplicada à concepção discontínua do radiamento dê ainda a lei de Planck?*

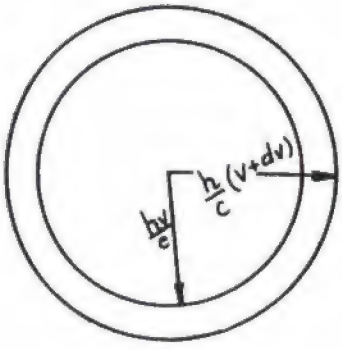
A resposta é afirmativa, mas antes de o mostrar (seguindo Bose) e a fim de preparar êsse estudo é interessante mostrar primeiro que a lei de Wien se pode ainda obter, procurando duma maneira diferente da do parágrafo precedente, o elemento da extensão em fase que corresponde ao elemento de energia *dE*.

Bose mostrou que nos podemos libertar da teoria electromagnética (em que nos fundámos anteriormente para obter o número de vibrações próprias dum recinto) admitindo que o quantum de radiamento (fotão) transporta uma quantidade de movimento $\frac{h\nu}{c}$ ao mesmo tempo que a energia $h\nu$.

Cada fotão será representado num espaço a seis dimensões por um ponto cujas coordenadas são primeiro as três coordenadas de posição (x, y, z) e em seguida os três componentes da quantidade de movimento (p_x, p_y, p_z). O elemento da extensão em fase é portanto:

$$d\Omega = d_x\, d_y\, d_z\, dp_x\, dp_y\, dp_z$$

A extensão em fase decompõe-se assim numa extensão em configuração e numa extensão em quantidade de movimento.



Para tôdas as freqüências compreendidas entre ν e $\nu+d\nu$ e para tôdas as posições possíveis no interior do recinto, temos:

$$\int d\vec{\Omega} = V\int dp_x dp_y dp_z \,. \tag{202}$$

Ora para a freqüência ν os pontos representativos na extensão em quantidade de movimento acham-se sôbre a esfera:

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2$$

de raio $\frac{h\nu}{c}$, e para a freqüência $\nu + d\nu$; acham-se sôbre a esfera de raio $\frac{h(\nu+d\nu)}{c}$. O integral do segundo membro de (202) é pois dado pelo volume compreendido entre estas duas superfícies esféricas:

$$\int dp_x dp_y dp_z = \frac{d}{d\nu}\cdot\frac{4\pi}{3}\left(\frac{h\nu}{c}\right)^3 d\nu = \frac{4\pi h^3\nu^2}{c^3}d\nu \,,$$

donde

$$d\Omega = \frac{4\pi h^3\nu^2}{c^3}Vd\nu \,. \tag{203}$$

Notemos agora que na concepção corpuscular da luz o fotão, no que respeita a sua estructura, e independentemente dos seus seis graus de liberfade (x, y, z, p_x, p_y, p_z), deve possuir um outro grau de liberdade que especifique o seu estado de polarização. Para cada $d\Omega$ deve haver dois estados de polarização diferentes, de sorte que devemos multiplicar o segundo membro de (203) por dois:

$$d\Omega = \frac{8\pi h^3\nu^2}{c^3}Vd\nu \,. \tag{204}$$

Se introduzirmos agora este $d\Omega$, na demonstração do parágrafo precedente, que nos conduziu à lei de Wien, somos conduzidos para N_ν, ao valor

$$N_\nu = V\frac{8\pi h^3\nu^2}{c^3}e^{-\frac{h\nu}{kT}}d\nu$$

e em seguida à lei de Wien por um raciocínio que de electromagnético nada tem.

IV PARTE
OS NOVOS MÉTODOS DE ESTATÍSTICA

Generalidades

a) Bose (1924) procurou em seguida um novo método de estatística que aplicado à concepção discontínua do radiamento o conduzisse à lei de Planck.

O novo método de estatística de Bose consiste primeiro *em substituir os elementos da extensão em fase infinitamente pequenos por elementos finitos, limitados, de extensão h^3, para três graus de liberdade.*

O número de estados possíveis, quere dizer o número de células elementares de extensão h^3 que vai corresponder à energia compreendida entre $h\nu$ e $h(\nu + d\nu)$ será então

$$\frac{8\pi\nu^2}{c^3} V d\nu \cdot$$

Em seguida, o raciocínio de Bose introduz uma modificação completa na maneira de calcular o número de complexões que realizam uma dada distribuïção. Bose procura a maneira de realizar uma distribuïção *atribuindo uma individualidade não aos sistemas (fotões) mas aos estados de energia ou às células da extensão em fase que os representam.*

Isto parece mais natural, porque êstes estados ou células h^3 são bem diferentes umas das outras, enquanto que os fotões não o são.

Não parece natural, com efeito, admitir que um fotão do interior dum recinto conserve em tôdas as emergências a sua individualidade, pois as parêdes emitem e absorvem radiamento. Mais, o seu número não é necessàriamente invariável, porque um fotão de freqüência ν, pode ser absorvido pela parêde e substituído pela emissão de vários, fotões de freqüências $\nu'\nu''$... tais que $\nu=\nu'+\nu''+\ldots$, sem que a energia varie.

Einstein aplicou este novo método de estatística de Bose aos gases e obteve as leis do fenómeno de *degenerescência quântica.*

b) Há ainda um outro novo método de estatística que foi desenvolvido por Pauli, Fermi e Dirac. Êste método completa o precedente: enquanto que no método de Bose cada célula h^3 da extensão em fase pode conter um número qualquer de fotões, neste outro método cada célula só pode conter ou *zero* sistemas ou *um* sistema. Se uma célula já se acha ocupada por um sistema, nenhum outro sistema poderá vir alojar-se nela: *há impenetrabilidade dos corpúsculos (de energia ou de matéria) do ponto de vista da extenção em fase.*

Os resultados a que conduz êste método são os seguintes: aplicado aos gases dá de novo, mas duma maneira muito mais exacta as leis de degenerescência; aplicado aos fotões *já não dá* a lei de Planck. Quere dizer: *deve-*

mos tomar duas atitudes diferentes, do ponto de vista da Mecânica estatística quando se trata de matéria ou de radiamento.

Estatística de Bose-Einstein

O novo método de estatística de Bose-Einstein faz predominar a individualidade dos estados em que se podem achar os sistemas e introduz *ipso-facto* uma espécie de solidariedade entre os elementos constitutivos do radiamento. Êste método conduz à lei de Planck e às flutuações que lhe correspondem. Retomemos primeiro os resultados estabelecidos anteriormente do ponto de vista da estatística ordinária aplicada aos quanta, insistindo sôbre a concepção da individualidade dos sistemas (fotões).

A posição dêstes fotões no espaço pode ser qualquer; a sua velocidade é constante e igual a c, e a repartição das suas direcções isótropa. A energia dos fotões é $h\nu$ e a sua quantidade de movimento $\frac{h\nu}{c}$.

a) *Células finitas da extensão em fase*

Calculámos há pouco o elemento da extensão em fase correspondente aos diferentes estados que o fotão pode tomar quando a sua posição varia no volume V e quando a sua energia (ou a sua freqüência) varia de $h\nu$, a $h(\nu + d\nu)$; tendo em conta os dois estados de polarização possíveis, o elemento de volume era

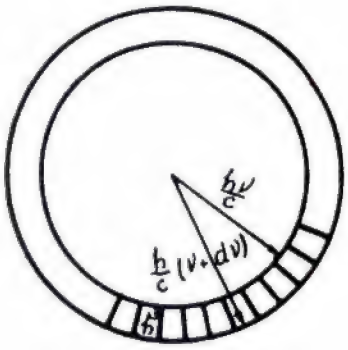
$$\frac{8\pi h^3 \nu^2}{c^3} V d\nu \,. \tag{205}$$

Mas se os elementos da extensão em fase são finitos e de extensão h^3, o seu número será

$$g_a = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} V d\nu \,. \tag{206}$$

Cada uma destas g_a células corresponde a *um estado diferente e a uma mesma energia*: devem pois ser consideradas, de acôrdo com o nosso postulado fundamental, de igual probabilidade "à priori".

Êste número g_a é análogo ao *factor de degenerescência* da Estatística clássica. E é realmente notável que se consiga reobter por um processo tão directo o resultado de Debije, Weyl e Conrant, etc. sôbre o número de vibrações próprias dum recinto de volume V na teoria electromagnética. A marcha seguida aqui nada tem de electromagnética e o raciocínio é mais coerente.



Representemos ùnicamente a extensão em quantidade de movimento.

Na zona compreendida entre as duas esferas temos g_a células de extensão h^3.

Tomemos um número determinado de fotões aos quais fornecemos a energia total

$$U = \Sigma_{(\alpha)} N_\alpha h\nu \tag{207}$$

e procuremos a distribuïção mais provável pelas diferentes frequências. Entre as freqüências ν e $\nu+d\nu$ temos N_α fotões, de sorte que

$$N = \Sigma_{(\alpha)} N_\alpha \,. \tag{208}$$

Para obtermos, de tôdas as distribuïções compatíveis com (207), a mais provável vamos tomar para medida da probabilidade duma distribuïção o número de maneiras de a realizar.

b) *Aplicação da estatística clássica a estas células.*

Se atribuirmos uma individualidade a cada fotão devemos considerar diferentes duas complexões não sòmente se houver números diferentes de fotões em cada célula, mas ainda se, nas células, os fotões são diferentes.

Calculemos o número de complexões duma distribuïção caracterizada pela presença de N_α fotões na camada α. Calculemos primeiro o número de complexões que se podem obter permutando entre si as N_α fotões duma mesma camada: como em cada célula pode haver um número qualquer de fotões, temos de fazer os arranjos completos de g_α índices N_α a N_α, que são

$$g_\alpha^{N_\alpha}$$

Sem permutar os fotões entre as diferentes camadas, façamos a mesma operação em cada camada; obtemos para o conjunto dos N fotões o produto

$$\Pi_{(\alpha)} g_\alpha^{N_\alpha} \,.$$

Se agora permutarmos os fotões entre as camadas, introduz-se o factor

$$\frac{N!}{N_1! N_2! \ldots N_\alpha!}$$

O número de complexões será então na hipótese da individualidade dos fotões:

$$W = N! \Pi_{(\alpha)} \frac{g_\alpha^{N_\alpha}}{N_\alpha} \,. \tag{209}$$

Admitindo que os N_α são suficientemente grandes para podermos utilizar a fórmula simplificada de Stirling, teremos

$$\log W = N \log N + \Sigma_{(\alpha)} \left(N_\alpha \log g_\alpha - N_\alpha \log N_\alpha \right) \tag{210}$$

$$\delta \log W = \Sigma_{(\alpha)} \left(\log g_\alpha - 1 - \log N_\alpha \right) \delta N_\alpha \tag{211}$$

Para termos em conta (207) e (208) multiplicamos as suas variações pelas constantes -β e *log* a+1, e juntamos membro a membro a (211). Vem

$$\delta \log W = \Sigma_{(\alpha)} \left(\log g_\alpha - \log N_\alpha + \log a - \beta h\nu \right) \delta N_\alpha = 0 \,,$$

de sorte que

$$\log g_\alpha - \log N_\alpha + \log a - \beta h\nu = 0 \,,$$

donde

$$N_\alpha = a g_\alpha e^{-\beta h\nu} \,. \tag{212}$$

α e β determinam-se pelas condições impostas (207) e (208). Se fizermos agora

$$\beta = \frac{1}{kT},$$

vem

$$N_\alpha = \alpha g_\alpha e^{-\frac{h\nu}{kT}}$$

e como g_α é proporcional a $\nu^2 d\nu$, reobtemos a lei de Wien.

$$N_\alpha = CV\nu^2 e^{-\frac{h\nu}{kT}} d\nu,$$

com uma energia por unidade de volume da forma

$$C\nu^3 e^{-\frac{h\nu}{kT}} d\nu$$

c) *Aplicação da Estatística de Bose*

Para reobtermos a lei de Planck é necessário utilizar a nova estatística de Bose.

Vejamos, com as mesmas hipóteses, o que se obtém renunciando à individualidade dos fotões.

Para obtermos o número de complexões duma distribuïção, vamos considerar como uma única e mesma complexão tôdas aquelas em que o número de fotões em cada célula fôr o mesmo.

Temos N_α fotões a distribuir por g_α células, de sorte que vamos ter um número de complexões igual ao número de combinações completas dos g_α índices característicos das células N_α a N_α, isto é

$$\frac{(N_\alpha + g_\alpha - 1)!}{N_\alpha!(g_\alpha - 1)!}.$$

Fazendo a mesma operação para cada uma das camadas, o número total de complexões será o produto

$$W = \Pi_\alpha \frac{(N_\alpha + g_\alpha - 1)!}{N_\alpha!(g_\alpha - 1)!}. \tag{213}$$

Vê-se por esta expressão que, contràriamente ao que se passava na estatística clássica, o número total N de fotões não intervem, de sorte que *não faremos nenhuma hipótese sôbre o número total de fotões, que fica indeterminado.* Mas, naturalmente, supomos dada a energia total U contida no recinto de volume V:

$$U = \Sigma N_\alpha h\nu. \tag{214}$$

Agora o raciocínio é análogo ao que fizemos em Mecânica estatística clássica. Suporemos que os números g_α e N_α são suficientemente grandes para podermos desprezar a unidade em face deles, e obtemos

$$\log W = \Sigma_\alpha \left\{ (N_\alpha + g_\alpha)\log(N_\alpha + g_\alpha) - g_\alpha \log g_\alpha - N_\alpha \log N_\alpha \right\}. \tag{215}$$

Quando se faz variar o número N_α de fotões existentes numa camada, os g_α são constantes, de sorte que

$$\delta \log W = \Sigma_\alpha \left\{ \log(N_\alpha + g_\alpha) - \log N_\alpha \right\} \delta N_\alpha. \tag{216}$$

Multiplicando a variação de (214) por -β e somando membro a membro, temos

$$\delta \log W = \Sigma_\alpha \left\{ \log \frac{N_\alpha + g_\alpha}{N_\alpha} - \beta h\nu \right\} \delta N_\alpha = 0 ,$$

donde

$$\frac{N_\alpha + g_\alpha}{N_\alpha} = e^{\beta h\nu} ,$$

e pondo como anteriormente $\beta = \frac{1}{kT}$:

$$\frac{g_\alpha}{N_\alpha} = e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1$$

e finalmente

$$N_\alpha = V \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} ,$$

A densidade de energia por unidade de volume é portanto:

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \frac{d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

que é a *lei de Planck*.

Aplicação desta estatística às moléculas dum gaz (Einstein)

Como o abandono da individualidade dos sistemas foi frutuoso, Einstein aplicou êste método de estatística de Bose aos gazes perfeitos.

O raciocínio é fundamentalmente o mesmo; a única diferença está em que as moléculas se distinguem uma das outras primeiro pelas suas velocidades, e depois pela sua energia potencial E_0 que varia num campo de fôrças exterior com a posição das moléculas.

A energia total duma molécula é

$$E = E_0 + \frac{1}{2} m v^2 = E_0 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} , \qquad (217)$$

introduzindo o momento *p*.

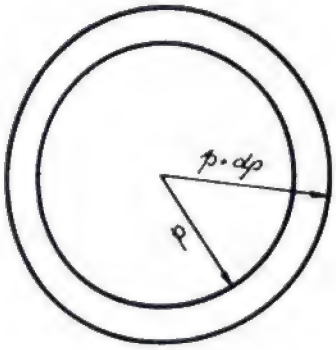
A massa m será constante por que as velocidades das moléculas são fracas nas condições usuais.

Se o gaz se acha contido num recipiente de volume V, para termos a extensão em fase total, será necessário combinar uma extensão em configuração com uma extensão em quantidade de movimento.

Procuremos primeiro o elemento da extensão em quantidade de movimento. A extensão da camada compreendida entre as duas esferas é

$$d\left(\frac{4}{3} \pi p^3 \right) = 4\pi p^2 dp ,$$

Se a energia potencial varia dum ponto para outro é necessário fazer uma distinção dos diferentes elementos de volume. Vamos considerar apenas o caso em que não há campo de forças exterior, supor portanto que os diferentes elementos de volume são equivalentes.



O elemento da extensão em fase $d\Omega$ será.

$$d\Omega = V4\pi p^2 dp \ ,$$

para as moléculas cuja energia está compreendida entre E e $E+dE$.
O número g_α de células de extensão h^3 nesta camada será:

$$g_\alpha = \frac{4\pi p^2}{h^3} V dp \ .$$

O cálculo agora segue da mesma maneira que anteriormente substituindo $h\nu$ por E:

$$U = \Sigma_{(\alpha)} N_\alpha E_\alpha$$

$$W = \Pi_{(\alpha)} \frac{(N_\alpha + g_\alpha - 1)!}{N_\alpha!(g_\alpha - 1)!}$$

$$\delta \log W = \Sigma_{(\alpha)} \left(\log \frac{N_\alpha + g_\alpha}{N_\alpha} - \beta E_\alpha \right) \delta N_\alpha$$

Ora aqui o número total de moléculas é dado:

$$\Sigma_{(\alpha)} N_\alpha = N$$

e

$$\Sigma_{(\alpha)} \delta N_\alpha = 0 \ ,$$

de sorte que por um raciocínio já muitas vezes usado:

$$\delta \log W = \Sigma_{(\alpha)} \left(\log \frac{N_\alpha + g_\alpha}{N_\alpha} - \beta E_\alpha + \log a \right) \delta N_\alpha = 0 \ .$$

Igualando a zero os coeficientes dos δN_a independentes, temos

$$\frac{N_\alpha}{N_\alpha + g_\alpha} = a e^{-\beta E_\alpha}$$

e

$$N_\alpha = g_\alpha \frac{a e^{-\beta E_\alpha}}{1 - a e^{-\beta E_\alpha}} = g_\alpha \frac{a}{e^{\beta E_\alpha} - a} \ . \qquad (218)$$

Calculemos o número total de moléculas e a energia média.
Temos

$$N = \Sigma_{(\alpha)} N_\alpha = a \Sigma_{(\alpha)} g_\alpha \frac{e^{-\beta E_\alpha}}{1 - a e^{-\beta E_\alpha}} = a \Sigma_{(\alpha)} \frac{g_\alpha}{e^{\beta E_\alpha} - a} \qquad (219)$$

$$U = a \Sigma_{(\alpha)} \frac{g_\alpha E_\alpha}{e^{\beta E_\alpha} - a} \ .$$

A energia média duma molécula é então:

$$\overline{E} = \frac{U}{N} = \frac{\Sigma_{(\alpha)} \frac{g_\alpha E_\alpha}{e^{\beta E_\alpha} - a}}{\Sigma_{(\alpha)} \frac{g_\alpha}{e^{\beta E_\alpha} - a}} \tag{220}$$

Se nesta expressão da energia média fizermos *a=0* obtemos a expressão (84) fornecida pela estatística clássica, e a equipartição pelos graus de liberdade.

Einstein dá à constante a o nome de *constante de degenerescência*. Os fenómenos de degenerescência são particularmente importantes quando a é grande em relação a exponencial $e^{\beta E_\alpha}$

Estatística de Pauli, Fermi e Dirac

Pauli, com o seu *princípio de exclusão*, introduziu ordem e clareza na classificação das riscas espectrais.

Estudando a distribuïção dos electrões pelos diferentes niveis energéticos do átomo, Pauli foi conduzido a formular a seguinte regra que depois foi erigida em princípio: *a dois electrões diferentes do mesmo átomo não corresponde nunca a mesma combinação dos quatro números quânticos* n_1, n_2, n_3, s.

Pauli exprimiu esta condição como sendo uma espécie de *impenetrabilidade dos electrões* do ponto de vista da sua presença numa célula caracterizada por aqueles quatro números quânticos.

Deve-se dizer que Bohr iá tinha esboçado esta ideia admitindo no seu modêlo d'átomo a existência de *trajectórias ocupadas*.

Quere dizer que está na própria natureza dêstes corpúsculos materiais o impedirem-se mutuamente de ocupar o mesmo lugar na distribuïção dos números quânticos.

Fermi em 1926 pensou que êste resultado se podia transportar para o domínio da estatística atómica e molecular.

Na teoria estatística manifesta-se uma certa analogia entre as trajectórias quânticas dos pontos representativos e as células da extensão em fase, e Fermi admitiu que as células do espaço representativo, de extensão h^3, só podem ser ocupadas por *um único* átomo; logo que uma célula contém um átomo, esta célula fecha-se a todos os outros átomos.

Isto é uma *generalização imediata da noção de impenetrabilidade da matéria*.

Independentemente Dirac fêz a mesma sugestão e mostrou que esta ideia é uma conseqüência racional da nova Mecânica quântica.

Posto isto se fôrmos procurar o número de complexões que permitem realizar uma distribuïção, deveremos procurar o número de combinações dos g_α índices N_α a N_α mas uma dada célula não poderá figurar duas vezes, e pode mesmo de resto não figurar nenhuma vez.

O número de combinações completas é agora substituído por

$$\frac{g_\alpha!}{(g_\alpha - N_\alpha)!}.$$

Continuando o raciocínio como no problema precedente, chegamos à lei:

$$N_\alpha = g_\alpha \frac{ae^{\beta E_\alpha}}{1 + ae^{-\beta E_\alpha}} = g_\alpha \frac{a}{e^{\beta E_\alpha} + a}. \tag{221}$$

O que há de curioso nesta fórmula é que o sinal – do denominador da expressão (218) é substituído aqui pelo sinal +.

Se aplicarmos esta estatística aos fotões, já não introduziremos a condição

$$E_{(a)} N_a = N ,$$

o que equivale a fazer log $a = 0$, $a = 1$. Obtemos

$$N_a = g_a \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} + 1} \tag{222}$$

que já não é a fórmula de Planck a única que como se sabe é conforme aos factos experimentais.

É-se então levado a concluir que a impenetrabilidade dos diferentes elementos da extensão em fase, que parece necessário admitir por razões espectroscópicas, não é certamente legítima do ponto de vista dos fotões.

Isto sublinha mais uma vez a diferença profunda que parece existir entre os fotões e os corpúsculos materiais.

Tôdas estas questões serão retomadas em detalhe nos cursos futuros.

BIBLIOGRAFIA

E. Borel e F. Perrin – Mécanique statistique classique.

L. Boltzmann – Leçons sur la théorie des gaz.

L. Brillouin – Les statistiques quantiques – L'atome de Bohr.

L. de Broglie – Thèse nos Annales de Physique – Ondes et mouvements – Matière et lumière

E. Fermi – Molecole e cristali.

R. H. Fowler – Statistical Mechanics.

J. Frenkel – Wave Mechanics.

J. W. Gibbs – Principes èlementaires de Mécanique statistique – Collected Works.

J. H. Jeans – Théorie dynamique des gaz – Théorie du rayonnement et des quanta.

P. Langevin – Leçons au Collège de France.

P. Langevin et *M. de Broglie* – La théorie du rayonnement et des quanta.

Von Laue – La théorie de la relativité.

H. A. Lorentz – Leçons au Collège de France – Lectures in Theoretical Physics.

M. Planck – Theory of Heat.

J. Rice – Statistical Mechanics.

O. W. Richardson – Theory of Matter.

R. Tolman – Statistical Mechanics –Relativity, Thermodynamics and Cosmology.

Discursos Proferidos na Cerimónia de Homenagem ao Professor António da Silveira

Intervenção do Presidente do IST, Professor Doutor Diamantino Durão

Intervenção do Presidente de Academia das Ciências, Professor Doutor Manuel José de Abreu Faro

Intervenção do Professor Doutor Alves Marques do I.S.T.

TÉCNICA
Revista de Engenharia
Publicação trimestral
de investigação científica e desenvolvimento

UMA REVISTA DE ENGENHARIA

A Técnica, Revista de Engenharia, tal como a Associação dos Estudos do Institut Superior Técnico, onde se integra, acompanha, desde os primeiros tempos, c vida do Instituto.

Das suas páginas constam artigos científicos e técnicos de flagrante actualidad quantas vezes pioneiros, entre nós, de ciência nova e de novas tecnologias.

A revista tem uma periodicidade de quatro números por ano e está estruturada e perfeita adequação à intensa actividade de investigação e desenvolvimento que hoje s processa no campus de Instituto Superior Técnico.

Compreende, assim artigos convidados, comunicações científicas originais e notícia sucintas e rigorosas sobre ciência, tecnologia e desenvolvimento.

Trata-se, pois, de uma revista científica de nível o que não impede a colaboração d estudantes desde que devidamente credenciados por investigadores qualificados e d reconhecido mérito.

Torne-se assinante da Técnica.

Para mais informações contacte-nos pelo telefone 351-1-848 10 18 / 841 73 62 ou fax 351-1-847 40 14 / 849 92 4
ou escreva-nos para: Técnica, Revista de Engenharia, Av. Rovisco Pais n.° 1, P-1098–Lisboa CODEX
Publicidade: DOSSIER – Comunicação e Imagem, Lda., R. Eça de Queirós, 18 - 2.° 1000 Lisboa
Telefs. (01) 355 92 94/5 - 353 73 21 – Fax/Telef. (01) 353 73 12

CERIMÓNIA DE HOMENAGEM AO PROFESSOR ANTÓNIO DA SILVEIRA

Intervenção do Presidente do IST
Prof. Doutor Diamantino Durão

Exmo. Senhor Ministro da Educação
Exmo. Senhor Reitor da UTL
Exmo. Senhor Presidente da Academia das Ciências
Exmos. Senhores Familiares do Prof. António da Silveira
Exmo. Senhor Presidente do Conselho do Dept. de Física
Exmos. Senhores Convidados
Caros Colegas, Funcionários e Alunos
Minhas Senhoras e Meus Senhores,

É com muita emoção e espírito de gratidão que o Instituto Superior Técnico presta hoje homenagem ao Prof. António da Silveira, professor eminente, que dedicou ao IST mais de 40 anos de relevantes serviços, no âmbito do ensino e da investigação.

Aos familiares do Professor António da Silveira, ao seu filho Dr. Rui da Silveira, a todos aqueles que com o Professor trabalharam, e a todos os que nesta hora aqui quiseram estar entre nós evocando a sua memória, o nosso sentido muito obrigado.

Permitam-me uma referência especial ao Exmo. Senhor Ministro da Educação, que, como aluno, docente e professor desta Escola e aluno do Prof. Silveira, nos deu a honra de estar presente nesta cerimónia de homenagem.

Agradeço também a todos os que contribuíram para a realização desta Cerimónia.

Neste anfiteatro, aonde tantas aulas e exames realizou e tantos alunos ensinou, que vamos descerrar um medalhão com a efígie do Prof. António da Silveira por forma a demonstrarmos o nosso reconhecimento pela sua enorme contribuição não só a favor do nosso Instituto, mas também do ensino e da investigação no próprio país.

Desde os tempos da criação do Instituto Superior Técnico pelo Prof. Alfredo Bensaúde, que os cursos de engenharia da Escola têm fortes bases científicas no âmbito das ciências fundamentais, Matemática e Física, que efectivamente são os pilares estruturantes para o desenvolvimento do conhecimento tecnológico.

Coube esta importante missão, a partir dos anos trinta e na área da Física ao Prof. António da Silveira, como, aliás na área da Matemática tinha acontecido ao Prof. Mira Fernandes, cerca de 20 anos antes.

O Prof. António da Silveira imprimiu na Física uma estrutura sólida e rigorosa, que na época serviu também para impor, actualizar e modernizar o seu próprio ensino.

Assim, regeu durante muitos anos no IST os cursos de Física Geral e Experimental partes I e II, disciplinas dos 2.º e 3.º anos de todas as licenciaturas

de engenharia. Mais tarde, com a entrada dos novos planos curriculares de ensino, regeu também com elevado nível a disciplina de Mecânica Quântica e Física Nuclear, obrigatórias para o 4.º ano de Engenharia Química e opcional para Electrotecnia.

O Prof. António da Silveira foi chamado a colaborar em numerosos doutoramentos e concursos, tendo contribuído inequivocamente para a consolidação e elevação do nível de qualidade do ensino da Física, em todas as Universidades Portuguesas, bem como para engrandecer o nome do nosso Instituto.

Em defesa de exigentes níveis científicos são memoráveis algumas das suas intervenções no Conselho Escolar, que foram de enorme importância para a elevação da qualidade do ensino no IST, que todavia na altura nem sempre foram totalmente compreendidas pelos seus pares.

Para o profundo conhecimento dos fenómenos físicos a que aplicava uma modelização muito avançada terá certamente contribuído o facto de ter sido durante cerca de 4 anos, a partir de 1929, investigador no Laboratoire de Physique du College de France, na altura dirigido pelo Prof. Langevin, bem como as várias e prolongadas estadias em outros importantes centros de investigação em França, Inglaterra e nos Estados Unidos.

Devido a este interesse pela investigação, deve-se ao Prof. António da Silveira a criação do Instituto de Física Matemática, onde congregou numerosos docentes do IST e de outras universidades, que realizaram e ainda realizam trabalho científico de elevada qualidade. O Prof. António da Silveira conseguiu esta importante obra para o meio científico quando era Presidente do Instituto de Alta Cultura.

Também durante a sua presidência foi lançado pelo IAC um importante concurso de bolsas para a realização de investigação no estrangeiro.

É de realçar que o Prof. António da Silveira foi o professor orientador do primeiro doutoramento que se realizou no IST.

Por todas estas realizações mencionadas e por muitas outras que havia para referir, o IST agradece reconhecidamente a obra de muito meritório levada a cabo pelo Prof. António da Silveira.

Gostaria de mencionar que os herdeiros do Prof. Silveira, doaram ao Instituto Superior Técnico uma parte significativa da sua biblioteca científica (cerca de 700 livros) e parte do seu arquivo pessoal, que ficarão na biblioteca do Departamento de Física. Por isso, queremos publicamente apresentar os nossos agradecimentos, muito especialmente a seu filho o Dr. Rui da Silveira.

Esta doação é para nós um sinal de confiança e amizade que muito nos honra, não só pelo valor real, mas também pelo seu valor afectivo. Guarda-la-emos e estima-la-emos, para podermos, por um lado, mostrar aos vindouros este gesto de generosidade, e por outro, relembrarmo-nos da obra de tão ilustre professor.

Há que manter sempre presente a imagem de figuras tão relevantes no Ensino e na Investigação do Instituto Superior Técnico, por forma a serem um exemplo a seguir pelos mais novos.

Bem hajam. Muito obrigado.

HOMENAGEM AO PROFESSOR ANTÓNIO DA SILVEIRA

Intervençao do Presidente de Academia de Ciências
Prof. Doutor Manuel José de Abreu Faro

Agradece a Academia das Ciências de Lisboa, o convite, a comparticipação que lhe foi facultada na homenagem que o Instituto Superior Técnico presta ao Professor António da Silveira.

As palavras com que me encontro, as primeiras, são aquelas que proferi na Academia, numa Sessão da Classe de Ciência poucos dias depois do falecimento do Professor António da Silveira.

"Era um homem cientificamente exigente e rigoroso e a pessoa a quem mais exigiu e exigia era a ele próprio".

Que era assim, transparece claramente dos seus escritos, dos livros que escreveu, dos seminários que organizou.

A sua influência na elevação do nível científico do ensino da Física na Universidade Portuguesa é inequivocamente reconhecida. Resultou fundamentalmente da sua intervenção em todos ou quase todos os concursos, doutoramentos e provas de agregação em Física e do que daí emergiu em conselho, crítica justa e sábia advertência.

Concisão, rigor e suficiência de palavras eram uma constante nas suas intervenções, no modo como julgava e apreciava o que ouvia.

Assim foi sempre no largo tempo de convívio na Academia, nas Sessões que frequentava com notável assiduidade.

Presidente do Instituto de Altos Estudos da Academia das Ciências de Lisboa guarda-se a sua imagem num quadro a óleo, onde a expressão do olhar é particularmente fiel.

Alfredo Bensaúde, Mira Fernandes, Duarte Pacheco e António da Silveira, num pormenor que não abordaremos aqui, representam, traduzem uma sequência em que cada um deles se reconheceu e intermotivou.

E daí nasceu e se construiu notícia para os mais novos, para os eventuais e futuros alunos do I.S.T.

Uma Escola difícil, com uma admissão muito difícil mas que atraía e, de facto, atraiu muitos e de grande valor.

Anos e anos o Instituto Superior Técnico se afirmou e alteou por força de esses dois professores que foram, Mira Fernandes e António da Silveira.

Apurando de cada um dos que os ouviu, não obstante as dificuldades que tenham encontrado, colhe-se invariavelmente uma e a mesma conclusão:

"... Foi a formação com o Mira e com o Silveira que nos permitiu, mais tarde, em circunstâncias e problemas tão diversos, enfrentar o difícil...".

Milagres que a formação consegue sábia colocação de professores de alto nível e prestígio nos primeiros anos do cursos de Engenharia.

Milagre das aulas que mais do que a explicação pormenorizada, do que já é pormenor, conseguem e constroem inquietude, altura e além.

A AEIST nasceu do Técnico, mas o Técnico, o Instituto, deve parte

importante da sua configuração e prestígio ao que a sua Associação de Estudantes tem sabido e desejado ser.

O essencial rege-se por regras simples de evidência e decorrente dever:

É estudante quem estudar.

É professor quem ensinar.

Que possa estudar quem estuda e que possa ensinar quem saiba e se ofereça.

Assim, quase assim, dissemos por ocasião dos 75 anos da Associação.

Mais tarde, no Editorial do número comemorativo dos 70 Anos da Técnica, na linha do mesmo pensamento, salientamos:

"Da assunção deste dever, do espírito de missão, entusiasmo e rigor científico, que punham no seu cumprimento, são exemplos admiráveis os excertos que se publicam de dois cursos:

- Modernas Concepções da Mecânica, de Mira Fernandes, proferido no Instituto de Altos Estudos da Academia.
- Estrutura da Luz – Hipótese dos Quanta – Métodos da Estatística, de António da Silveira.

Já anteriormente publicados, reeditamos parte.

Num número que virá a lume na proximidade desta homenagem a TÉCNICA deliberou completar o curso do Professor Silveira.

Justa homenagem que a Técnica presta ao Professor António da Silveira e valiosa oportunidade para todos aqueles que por estas coisas se interessam e delas querem saber o essencial com rigor e com a vantagem que advém de uma admirável e sóbria simplicidade.

Tenho em minha casa uma fotocópia encadernada, de um livro que o Professor Silveira me emprestou e lhe tinha sido oferecido pelo Professor Mira Fernandes.

"Caractéristiques des Systèmes Differentiels et Propagation des Ondes, de Levi Civita, Paris, 1932".

Levi – Civita, do Transporte Paralelo que tanto encantava Mira Fernandes e dele apresentou na Academia dos Lincei, notáveis comunicações.

Recordação que me é grata manter. Sinal de modernidade e actualidade da minha Escola e da intermotivação dos dois professores que temos vindo a distinguir.

Dizia-me o Professor Herculano de Carvalho que muito estimava e admirava o Professor António da Silveira.

"o que me espantava no Silveira era a actualidade e profundidade dos livros que lia, ainda estudante, muito novo ...".

Nasceu o Professor António da Silveira em 28 de Março de 1904.

Muito novo, recém-formado em Engenharia Química, beneficiou do valioso convívio com uma sociedade culta e de vanguarda, em França, no Mundo da Física.

Investigador no Laboratoire de Physique du Collège de France, dirigido por Langevin, (1929-1932), por essa ocasião frequentou Cursos e Seminários de Física no Collège de France, Sorbonne e Institut Henri Poincaré.

Seguiram-se missões a França, 1935 e 1937, e uma outra de quase um ano nos Estados Unidos em Princeton; em 1940, julgo.

Realizou por incumbência da Junta de Energia Nuclear uma missão a França e Inglaterra em 1956.

Mais tarde, por um período de seis meses, estagiou mais uma vez em França, em 1956, em pleno desenvolvimento e actualidade do que então era a Física Nuclear.

Nos Novos Planos dos Cursos de Engenharia de 1955 figurava a disciplina de Mecânica Quântica e Física Nuclear para o quarto ano do Curso em Química e opção para o 6.º ano de Electrotecnia.

Fui aluno do Professor Silveira, demo-nos bem.

Nos meados dos anos 50 proporcionou-me uma bolsa para os Estados

Unidos. Responsabilidades familiares, encargos pesados, impediram-me, não pude aceitar.

Tive grande honra que tenha pertencido ao Júri do meu Concurso para Professor Catedrático de Telecomunicações. Júri restrito em que apenas participaram Professores de Física e de Electrotecnia, de Coimbra, Lisboa e Porto.

Em 1963, por proposta do Professor Herculano de Carvalho e também por ele assinada ingressei como Sócio Correspondente da Academia das Ciências de Lisboa.

Pelos fins de uma tarde de 5.ª feira, procurou-me no Pavilhão de Electricidade: "... é Sócio Correspondente da Academia a partir de hoje".

Em 1963, o Ministro Galvão Telles convidou-me para presidir ao Grupo Ensino e Investigação do Plano Intercalar de Fomento e por aí se conseguiu uma verba importantíssima para bolsas de estudo no estrangeiro e que ainda se reforçou no III – Plano de Fomento.

Em 1964 Galvão Telles, remodelou o Instituto de Alta Cultura publicando uma lei excelente e com enorme potencialidade com três áreas distintas de actuação, embora interligadas

Fomento Cultural
Investigação Científica
Intercâmbio

Em 1964 o Professor António da Silveira assumiu as funções de Presidente do Instituto de Alta Cultura. Conjuntamente assumi as funções de Vice-Presidente. Colaboramos intensamente e em uníssono. Julgo que sempre me entendeu como uma espécie providencial de "Ministro das Finanças", local.

O I.A.C. dispunha de verbas e o Professor António da Silveira empenhou-se profundamente num projecto de Bolsas de Estudo com ênfase na Física e na Matemática tendo como objectivo fundamental a criação de um Instituto de Física e Matemática que possibilitasse criar entre nós uma ambiência de professores e investigadores plenamente actualizados, doutorados no estrangeiro em centros de excelência e creditados na comunidade científica.

Esse objectivo foi atingido e daí irradiou uma escola importante de investigadores, internacionalmente reconhecidos.

Pelos anos de 1966, deixei o lugar de Vice-Presidente do I.A.C. para assumir o de Presidente da Comissão de Estudos de Energia Nuclear.

Por que foi assim? Culpa de ninguém? Melhor diria nem dele nem de mim.

Mas mantive-me no Conselho Superior do I.A.C.

O Professor Silveira numa das Sessões do Conselho anunciou: "não temos Vice-Presidente, o Professor Abreu Faro mantém-se no Conselho Superior, é agora Presidente do Centro de Estudos de Energia Nuclear – e logo a seguir – é verdade, daqui a dias vou a Paris, duas semanas, talvez, alguém terá que assegurar o despacho, evidentemente que será o Professor Abreu Faro".

Com que cuidado o fiz! Dia a dia, hora a hora, para que nada tocasse o bom nome do I.A.C. e do seu Presidente.

Isto foi assim e em coisas importantes que o destino inesperadamente tece.

Em Outubro de 1966, fui a Lourenço Marques, a Luanda também a convite dos reitores Professor Veiga Simão e Professor Ivo Soares.

Ao despedir – diz-me:

> "Vai haver uma reunião importante, vai discutir-se o Instituto de Física e Matemática, gostava que você me escrevesse um cartão, dando a sua opinião".

Dei, com prazer e sinceridade.

Enalteci a grande importância dessa iniciativa.

Convidou-me para me integrar nesse Instituto.

Mas aí, disse-lhe que também tinha uma ideia sobre um Instituto de investigação mas no Técnico. Aproveitaria as potencialidades dos Centros já existentes da C.E.E.N do I.S.T.

Assim se foi anunciando o Complexo Interdisciplinar.

Em 1967 assumi as Funções de Presidente do Instituto de Alta Cultura.

Com prazer e especial cuidado se contemplou e foram concedendo verbas para a finalização do Instituto de Física Matemática.

Privei de perto com o Professor Silveira.

Do I.A.C., no meu carro, pelo fim da tarde, íamos até à Mexicana ou Café Londres, de boa memória: conversar, falar de Física, interrogava-o muito sobre a Física, sobre a Matemática dessa Física, e em que ele tinha excelente formação, própria e característica.

Passeámo-nos por Paris, por Saint-Michell, pelas Livrarias, por Laboratórios que visitamos.

Com frequência vejo os filhos.

O Prof. Rui da Silveira, Sócio Correspondente da Academia das Ciências de Lisboa, do Departamento de Física Nuclear Teórica de Orsay, envia-me os seus trabalhos, eu envio-lhe os meus e coisas da Técnica.

Na relação das pessoas, quando nos sucedemos em lugar e posição, há por vezes um certo desejo de querer saber, como foi, como é, como ficaram as coisas. Alimentam-se disso.

Alimento que não aprecio nem cultivo.

Um dia, descendo a Rua do Alecrim, vindo da Academia, olhando a estátua do Eça Queiroz, construi para mim e dessas pessoas, de algumas dessas pessoas, a pergunta tosca:

E os dois como ficaram, como são as relações?

Ri-me e proferi o que digo aqui pela primeira vez:

Sob o manto diáfano da fantasia, a nudez forte de mútua e recíproca lealdade, a força imensa da independência e de um mesmo ideal universitário.

Imaginei e pensei assim. Depois, aconcheguei-me à roupa e de consciência luminosamente tranquila desci a rua até à humildade da altura das águas do Tejo.

O PROFESSOR ANTÓNIO DA SILVEIRA

Intervenção do Professor Doutor Alves Marques do IST

Aos estudantes de Física; aos estudantes do Instituto Superior Técnico;

Agradeço ao Professor Diamantino Durão, Presidente do Instituto Superior Técnico, ter-me convidado a vir aqui dizer umas palavras sobre a pessoa ímpar que foi o Professor António da Silveira: e à Eng.ª Teresa Pera todo o seu denodo neste processo. Ao Professor A. da Silveira ter-me aturado durante mais de dezasseis anos como seu colaborador.

Quando se me depara hoje na minha vida académica alguma situação difícil, pergunto a mim próprio "Qual seria a opção que tomaria o Professor A. da Silveira se estivesse na minha situação?"

E para introduzir o meu testemunho começo por repetir isto que escrevi há alguns anos na revista Técnica (1).

> "... O Professor António da Silveira ... conseguiu criar no seu Laboratório condições favoráveis ao seguimento duma carreira (científica): adoptou nas disciplinas de Física que estavam sob a sua responsabilidade programas e métodos de ensino de nível adequado, actualizados e estimulantes, fez investigação científica e orientou (para doutoramento em Física) alguns estudantes no nosso País; criou, fez construir e equipar um Instituto destinado à investigação fundamental de que, mesmo depois de extinto, colhemos ainda hoje ... frutos".

O Professor A. da Silveira soube escolher e indicar aos seus colaboradores uma via de investigação que tem produzido e se espera virá a produzir um notável alargamento do conhecimento da estrutura e da dinâmica das soluções aquosas líquidas. As primeiras experiências do Professor António da Silveira seguiram-se à descoberta, por C.V. Raman, em 1928, do efeito que tem o seu nome e que grangeou ao descobridor a atribuição do prémio Nobel da Física.

Os resultados experimentais do Professor A. da Silveira serviram de tema à tese do cientista Michel Magat intitulada "Recherches sur le spectre Raman et la constituition de l'eau liquide" publicada, em 1936, no tomo 6, pág. 108-193 dos Annales de Physique e defendida na Universidade de Paris.

Numa comunicação lida à Academia das Ciências de Amsterdão (2), que teve lugar em Março de 1974, um célebre cientista holandês, o Professor J.A. Prins, indicava-se a ele próprio J.A. Prins e a António da Silveira como tendo sido os investigadores que estimularam o planeamento duma longa série de trabalhos sobre a difracção de raios X em soluções aquosas concentradas de sais inorgânicos de catiões metálicos. (O Professor Prins tem o seu nome citado em todos os textos sobre investigações da estrutura de líquidos por meio da difracção dos raios X (3)).

Publicou o Professor A. da Silveira cerca de trinta trabalhos, quase sempre sozinho, entre 1930 e 1965. Dificuldades inerentes às iniciativas exclusivamente portuguesas têm impedido que se dê aos trabalhos de A. da Silveira

o devido valor, que esperamos poderá um dia vir a ser reconhecido numa adequada consagração.

Parece-me oportuno transcrever para aqui (sem alterações sensíveis) um curto resumo do seu curriculum que vem inserido na contracapa duma edição que o ex-Instituto Nacional de Investigação Científica desejou fazer, em 1985, dos seus livros sobre a "A Teoria da Electricidade" (4).

> "António da Silveira, nascido a 28 de Março de 1904 em Coimbra, licenciou-se em Engenharia Química pelo Instituto Superior Técnico em 1929, tendo, em seguida, estagiado sob a orientação de P. Langevin no Laboratoire de Physique Experimentale do Collège de France até 1932. Frequentou então diversos cursos de Física Teórica na Sobornne e no Instituto Henri Poincaré, em Paris. Leccionou entre 1933 e 1974 no Instituto Superior Técnico, onde era Professor Catedrático, Física Geral, Física Complementar e Mecânica Quântica e Física Nuclear. Na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa regeu cursos de Física Teórica entre 1949 e 1956. Eleito membro efectivo da Academia das Ciências de Lisboa em 1952, foi Presidente do Instituto de Altos Estudos da Academia desde a sua fundação até à data do seu falecimento em Março de 1985. Entre 1964 e 1967 foi Presidente do Instituto de Alta Cultura. Presidiu de 1967 a 1974 ao Instituto de Física e Matemática (actualmente Complexo Interdisciplinar da Universidade de Lisboa) que criou e construiu.
>
> Foi-lhe concedido pelo Governo Francês o grau de Comendador da Legião de Honra em 1967. Teve Diploma de Honra do "Queens College" de City University of New York. (Recusou a Grã-Cruz da Instrução Pública oferecida em 1967 ao deixar o Instituto de Alta Cultura).
>
> A actividade científica do Professor A. da Silveira foi abundante tendo-se repartido por diferentes domínios da Física Teórica e Experimental, como Teoria do Electromagnetismo e Efeito de Raman em soluções de electrólitos, e aparecendo em diversas revistas como os Comptes Rendues de l'Académie des Sciences (Paris), Journal of Chemical Physics, Molecular Physics, Philosophical Magazine, Revista da Faculdade de Ciências de Lisboa, Gazeta de Física e outras.
>
> Além dos livros agora reeditados, escreveu ainda "Mecânica Clássica não Relativista" (1958), "Radiamento e Quanta" (1962) e "Introdução à Mecânica Ondulatória" (1963). Participou em diferentes missões de estudo no estrangeiro (França, Inglaterra, Estados Unidos) e promoveu diversos seminários científicos que permitiram aos jovens investigadores o contacto com alguns dos grandes nomes da Física.
>
> A sua actividade porém não se circunscreveu ao estudo de temas científicos, pois, tratou igualmente assuntos de carácter cultural e histórico-biográfico, de que são exemplos as conferências que realizou na Academia das Ciências sobre *O Elogio Histórico de L.A. Rebelo da Silva* ou *Recordando António Sérgio.*"

Interveio, de facto, com determinação na política científica no nosso País, apesar de ter de lutar contra a indiferença que existia nos anos 30 e nos anos 40 na instituição em que estava integrado no Instituto Superior Técnico. Salienta-se a sua colaboração na criação do Núcleo de Matemática, Física e Química, em 1936, a direcção do Seminário de Teorias Físicas e Física Nuclear do Instituto de Alta Cultura que criou em 1960, a implementação da concessão de bolsas de estudo para o estrangeiro, em 1965, durante o período em que foi presidente do Instituto de Alta Cultura, de 1964 a 1967, e finalmente, em 1966, o Instituto de Física Matemática (desejo fazer aqui uma referência de gratidão ao Professor F. Bragança Gil pela valiosa colaboração que deu no projecto das instalações experimentais).

Utilizarei aqui as próprias palavras do Professor António da Silveira (5) para contar para que servia o Instituto Superior Técnico nos primeiros anos da sua actividade de Professor:

"... No Instituto Superior Técnico havia uma "feroz" oposição à ideia de investigação. Uns membros do Conselho – quase todos – diziam:

– O Instituto Superior Técnico não é para fazer investigação! Não sabiam o que isso é, mas diziam-no. Seria para fazer engenheiros? A verdade é que alguns diziam, muito convencidos:

– O Instituto é para fazer administradores de empresas!... O Instituto também queria o seu declínio!... Nessa altura eu ainda me ocupava de física experimental – uma espécie de paixão:

Pour que l'homme puisse faire quelque chose de valable il lui faut la passion. C'est pourquoi la passion n'a rien d'immoral.

Hegel

....."

O que foi o Núcleo de Matemática, Física e Química (6).

"... Em Lisboa, a grande renovação, o despertar para a investigação científica, foram provocados por aquele pequeno grupo de antigos bolseiros quando fundaram o Núcleo de Matemática, Física e Química. Sem embargo das reacções que desencadeou – onde floresce a ciência logo germina a oposição – não obstante o seu pequeno tempo de vida, o efeito foi sensacional e decisivo. Numa sessão da Academia creio que se poderia dizer tudo, mas eu só preciso de referir o essencial, procurando evitar a criação ou a propagação de "mitos" que o tempo tornaria indestrutíveis.

Os fundadores do Núcleo foram Peres de Carvalho, Amorim Ferreira, Aniceto Monteiro, Manuel Valadares e António da Silveira. Havia um membro associado: Bento Caraça. O Núcleo, formado exclusivamente por universitários, como se vê, propunha-se desenvolver uma actividade científica independente, mas complementar, da das Escolas Superiores. Tinha por objectivo imediato realizar cursos de ciência moderna, autenticamente superiores, de nível europeu – sobre matérias que os programas estabelecidos não comportavam – e logo seminários, suscitando vocações, incutindo nos jovens o gosto pela investigação científica.

Assentou-se em que os cursos e os seminários se deviam realizar na Faculdade de Ciências e no Instituto Superior Técnico, animando-nos a esperança de que os respectivos directores cedessem as salas para esse efeito. Ponto importante: desejávamos que alguns colegas mais velhos colaborassem connosco, e não estava no nosso espírito pedir meças a ninguém. Acaso nunca teria havido, dentro da Universidade, outras "universidades paralelas", de explicadores encartados, que se faziam remunerar'? A verdade é que dois dos fundadores foram, "por fim", apresentados a Duarte Pacheco, então director do Instituto Superior Técnico, para lhe pedirem uma sala. Não só cedeu o anfiteatro de Química, como ainda ofereceu "outras facilidades"... que agradecemos.

Os cursos iniciaram-se em fins de 1936. O êxito foi verdadeiramente extraordinário; raras vezes o anfiteatro não ficava repleto. O sentimento do público era curioso: manifestava-se por um misto de interesse, de reconhecimento e de admiração. Vários professores e assistentes universitários assistiam aos cursos. Um membro da classe de Ciências, o professor Vicente Gonçalves, não hesitou em colaborar connosco, fazendo um curso; outro, o professor Varennes e Mendonça, ainda estudante, nunca faltou. Só mais outro professor universitário, Ruy Gomes, fez um curso.

Mas ... acabou por acontecer o que só depois se compreendeu que seria inevitável: a oposição tocou a rebate "por toda a parte". Sentindo dificuldade em se apropriarem da iniciativa, parecendo inábil tentarem interditar o Núcleo, agitaram uma bandeira de seguro efeito – estávamos em 1937-38: fomos acoimados de indesejáveis comunistas... possessos de ideias subversivas. A sempiterna e incorrigível história! Houve até – talvez demasiadamente preocupado com o problema da periodicidade de acontecimentos históricos – quem quisesse estabelecer certas analogias, correspondências, com as conferências do Casino de 1871!

Uma anedota em primeira mão dará ideia da atmosfera que se respirava. Duarte Pacheco, preocupado com o aspecto que ia tomando a campanha contra nós, desejoso de acalmar os ânimos, para poder informar o Ministério de que não havia propaganda política nos nossos cursos, antes ou depois, teve um dia esta ideia peregrina: escamoteou-se, com o electricista do Instituto, na cafua da máquina de projecção do anfiteatro durante umas horas, e de lá, quase imóvel, sem poder fumar, suando as estopinhas, escutou e observou o que se dizia e se fazia. Ficou edificado... e ficou certamente tranquilo. Isto foi-me contado, anos mais tarde, por alguém que esteve no segredo do audacioso subterfúgio.

No público havia por vezes curiosos que espreitavam pela lucarna da cafua. Imaginai o que se teria passado se lá tivessem dado com ele... a "disfarçar". Só o génio dum Daumier nos poderia dar, na sua gíria plástica, tudo o que havia de cómico e de grave, a um tempo, naquela situação.

A actividade do Núcleo nunca foi proibida. Mas houve quem opinasse que se devia legislar sobre "ensino superior particular"... Na verdade não foi necessário proibir o Núcleo, porque este Núcleo também queria o seu declínio. Por um jogo de circunstâncias e de coincidências peculiares e infelizes, o Núcleo acabou por se transformar num campo de batalha... de "excelsas virtudes". Provocada a necessária excitação por "inteligentes virtudes exteriores, prodigiosas imaginações criadoras"..., o Núcleo desintegrou-se, como todo o Núcleo que de preza, deixando cinco obras publicadas.

.....

Como pode documentar-se o seu interesse pela dinamização da investigação científica no nosso País (7):

"... Preparei primeiro tudo para se abrir *concurso público* para a concessão de Bolsas fora do país, em todos os domínios da Cultura, e especialmente nas ciências. Havia anos que não se fazia isto. Alguns jovens portugueses recorriam a outras instituições, nacionais ou estrangeiras, tendo eu dado alguns pareceres.

A política para a física teórica já tinha começado a dar frutos. Mas depois foi uma avalanche de jovens interessados.

Mandei fazer cartazes de grandes dimensões, a cor – do tipo dos de certas escolas de física, de verão –, anunciando o concurso. Caso curioso: Chamei simultaneamente os dois colaboradores mais próximos e perguntei-lhes se concordavam com a abertura do concurso... só para saber. Ambos responderam nestes termos, primeiro Medeiros Gouvêa:

– Concordo porque é o professor Silveira que o fez (sic). Sacro nome de Apolo! Podiam ter acrescentado, e acrescentariam muito bem... vistas as coisas do meu referencial.

Em 18 de Janeiro de 65 reuni o primeiro Conselho. Os seus membros passaram primeiro pelo meu gabinete, que dava para a sala do conselho. Mostrei-lhes o projecto de cartaz sobre o concurso de bolsas e não senti qualquer oposição – mesmo de quem era de esperar. Só Amândio

Tavares manifestou *grande* interesse pela iniciativa – e pelos cartazes: este homem não era bem como os outros.

....."

Que audácia foi usada na criação do Instituto de Física e Matemática, em 1966 (8).

"...Eu posso dizer agora que aceitei a presidência do I.A.C., em 1964, unicamente para fundar um Instituto de Física, fazer sair a Física da clandestinidade.

....."

No frontispício de (9) vem escrito:

"...S'il y a quelque gloirie à n'être pas compris, ou à ne l'être que très peu, je peux dire sans vanterie que *par cette entreprise* je l'ai acquise et méritée d'un seul coup.

Baudelaire

....."

"...Il faut se faire valoir par de choses qui ne dépendent point des autres mais de soi seul, ou rennoncer à se faire valoir.

La Bruyère

....."

Abro um parêntesis para transcrever aqui parte do texto do Decreto-Lei que criou o Instituto de Física e Matemática (10).

Ministério da Educação Nacional
Instituto de Alta Cultura

—

Decreto-Lei n.º 47 424

Considerando a alta importância de que se reveste cada vez mais, no mundo moderno, a investigação científica, designadamente a chamada "investigação fundamental"

....."

Considerando que, como se disse, se impõe trilhar uma via nova, qual seja a de lançar estabelecimento de investigação fundamental, com a extensão ou amplitude que lhes permita uma acção particularmente eficaz;

Considerando o papel de especial relevo que pertence, hoje em dia, às ciências físicas e matemáticas e a colaboração que deve existir entre os respectivos investigadores;

Considerando que se reveste, assim, do maior interesse a criação de um estabelecimento de investigação consagrado a essas ciências, o primeiro no género a instituir entre nós:

Considerando que se dispõe dos meios necessários para a sua conveniente instalação e apetrechamento e já se encontram mesmo em adiantada face os respectivos projecto e estudos;

Usando da faculdade conferida pela 1.ª parte do n.º 2 do artigo 109.º da constituição, o Governo decreta e eu promulgo, para valer como lei, o seguinte:

Art. 1.º É criado o Instituto de Física e Matemática, estabelecimento de investigação científica que fica na dependência do Instituto de Alta Cultura.

.....

TÉCNICA, n.º 3-4/97 JAN 98

Paços do Governo da República, 28 de Dezembro de 1966. – Américo Deus Rodrigues Thomaz – *António de Oliveira Salazar – António Jorge Martins da Mota Veiga – Manuel Gomes de Araújo – Alfredo Rodrigues dos Santos Júnior – João de Matos Antunes Varela – Ulisses Cruz de Aguiar Cortês – Joaquim da Luz Cunha – Fernando Quintanilha Mendonça Dias – Alberto Marciano Gorjão Franco Nogueira – Eduardo de Arantes e Oliveira – Joaquim Moreira da Silva Cunha – Inocêncio Galvão Teles – José Gonçalo da Cunha Sottomayor Correia de Oliveira – Carlos Gomes da Silva Ribeiro – José João Gonçalves de Proença – Francisco Pereira Neto de Carvalho.*"

Poucos anos depois o Jornal Português de Economia & Finanças publicava um texto sobre a Reforma do Ensino no nosso País (11):

> "... Paralelamente estabeleceram-se as bases da abertura de uma janela ainda que modesta sobre a investigação, ligada ou não ao ensino, concedendo-lhe uma importância e uma função que até agora nunca conheceu entre nós. A esta orientação se deve a relativamente recente criação do Instituto de Física e Matemática.
>
> ......"

Quando dei a conhecer este texto ao Professor Silveira mostrou-se satisfeito, naturalmente, e que era completamente alheio à sua elaboração e ... publicação que desconhecia.

Fecho o parêntese para transcrever finalmente o relato (12) da Sessão do Conselho Superior do Instituto de Alta Cultura em que se decidiu a construção do edifício que veio a ser a sede do ex-Instituto de Física e Matemática.

"... Tratava-se agora de apresentar a questão ao Conselho Superior. Ao corrente da iniciativa estavam os membros dos Conselhos que mais apareciam no I.A.C.: Sousa Pereira, Martins de Carvalho, Cotelo Neiva e, naturalmente, Medeiros Gouvêa e Abreu Faro, desde o início, os quais concordavam todos.

Mas era humanamente certo que Costa Pimpão e M. Barbosa levantariam objecções que poderiam arrastar outras. Como esquecer o que já me tinham dito? O que eu sabia? Isto obrigou-me a adiar a apresentação do caso ao Conselho para Outubro, a fim de me certificar da votação.

Reuni o Conselho em 10 de Outubro de 1966, tendo previamente mandado espalhar sobre a mesa exemplares do projecto da CANIU.

Antes da ordem do dia – como sempre que se tratava de iniciativas minhas – fiz um pequeno *speech* justificativo da iniciativa, salientando o decidido apoio do Ministro e as facilidades do Ministério das Obras Públicas. Veja-se o que dizia A. Gião, à *mon insu* pela mesma altura (13):

> ... il me semble que toute solution qui consisterait à essayer de créer au Portugal les conditions nécessaires à une véritable recherche fondamentale en partant de l'utilisation de ce qui existe actuellement comme base d'un développement futur, serait vouée à l'échec. La situation est telle qu'il faut, au contraire, envisager comme seule solution efficace ce qu'on pourrait appeler un "traitement de choc". J'entends par là l'installation au Portugal de quelques établissements scientifiques de premier ordre, à l'échelle moderne. Je serais même tenté de croire qu'il suffirant tout d'abord pour "démarrer" la recherche et pour créer un pôle d'attraction bienfaisant, de commencer par l'installation *d'un seal* établissement scientifique moderne.
>
> A. Gião

Por fim apresentei a seguinte proposta:

O Conselho Superior do I.A.C. decidiu atribuir à CANIU a verba de 6 148 061$90, a sair das receitas próprias deste Instituto, a fim de construir e instalar o Instituto Interuniversitário de Ciências Físicas e Matemáticas.

O texto completo e a discriminação das verbas encontra-se na Acta. E fiz referência ao projecto que estava em cima da mesa para ser consultado.

Usou da palavra, em primeiro lugar, M. Barbosa.

– Que já lhe tinham chegado uns zunzuns sobre esta iniciativa. Que era de longe, sem dúvida, a iniciativa de maior importância cultural desde a criação do Instituto de Alta Cultura, mas que andava preocupado com o *falatório* que havia em Coimbra, etc., etc.

Não posso reproduzir mais exactamente. Só posso reproduzir *exactamente* o que eu disse, em resposta:

– Os engenheiros da CANIU que se ocupam das novas instalações universitárias, em Coimbra, falaram provavelmente nesta iniciativa. Eu não dei a ninguém a importância de pedir segredo (sic).

  Falou depois Sousa Pereira que apoiou a iniciativa. Ver a Acta.

  Seguidamente foi dada a palavra a Costa Pimpão, que apoiando M. Barbosa, sem o dizer, se preocupou sobretudo com a origem da verba que eu tinha conseguido reunir, afirmando não saber que o I.A.C. tinha receitas próprias ...

  Claro, se o lugar de presidente fosse remunerado, se o I.A.C. dispusesse de meios que lhe permitissem fazer alguma coisa de vulto, quem podia admitir que a U.N. consentisse na minha nomeação? – tanto mais que havia pretendentes...

  Falou depois Medeiros Gouvêa que apoiou a iniciativa e deu explicações a Costa Pimpão sobre as receitas próprias e sobre a verba.

  Dei então conhecimento de um cartão de Abreu Faro – que tinha ido a Moçambique – onde dizia que concordava "e dava inteiro apoio não só a iniciativa como ao modo e termos em que foi concebida".

  Volta a falar M. Barbosa insistindo no *falatório,* em Coimbra, e sobre a sua posição pessoal como membro do Conselho Superior – "Que, sobre uma iniciativa de uma tal importância cultural ele nada sabia dizer quando lhe faziam perguntas... que se sentia mal colocado" (sic).

  Depois desta lenga-lenga, da insistência no falatório, eu disse:

– Se uma obra de tal importância cultural só pode ser feita pelo preço de algumas inconveniências, e se as inconveniências são essas de que falam V. Ex.as, em meu sentimento a obra fica quase de graça (sic).

  Falou depois Martins de Carvalho, que deu a impressão de aprovar – é quanto bastava –, e se espraiou sobre as vantagens de movimentar certas verbas, e sobre juros.

  Falou ainda Costa Pimpão para reincidir no que já tinha dito.

  Quand vous cherchez votre decision, regardez vers les sommets; il n'y a pas d'encombroments.

  De Gaulle

Com uma paciência "evangélica" – seja-me permitido dizê-lo –, ouvi tudo, e, já farto de tanto falatório – agora é que é o termo:

– Meus senhores, creio que já disseram tudo o que queriam dizer. Agora o que eu pretendo é, simplesmente, um sim ou um não na votação que vamos fazer imediatamente (sic).

Costa Pimpão atalhou prontamente:

– Está tudo feito, projecto, etc. Só nos resta aprovar.

Voltei-me então para Medeiros Gouvêa e disse:

– Sr. secretário, se assim é, está aprovado por unanimidade; passamos à ordem do dia (sic).

Eu tinha pedido ao Ministro para homologar a Nota de despacho de concessão da verba à CANIU logo que lha enviasse; e tinha combinado com Lousa Viana para aguardar um telefonema dizendo que tinha a verba à sua disposição e que podia iniciar a obra. Assim, logo que a proposta foi votada, toquei uma campainha para a minha secretária Maria de Fátima. Quando ela assomou à porta da sala, por um sinal imperceptível de cabeça, dei-lhe a entender que o contínuo podia partir para o Ministério. Tinha instruções para ir de táxi. Uma hora depois, nem tanto, o contínuo estava de volta com a Nota de despacho homologada, que Maria de Fátima me trouxe. Seguiu-se o telefonema para a CANIU.

Antes mesmo de o Conselho terminar, estava pois o processo em marcha.

....."

Dois ou três episódios mais para ilustrar o que possa dizer-se sobre a sua paixão pela investigação científica.

Quando se instalou, em 1954, no Instituto Superior Técnico um excelente espectroscópio do visível para se poderem prosseguir as suas investigações da estrutura e da dinâmica das soluções aquosas colaborou o Professor Silveira mesmo nas tarefas mais primárias... menos delicadas. Nesse tempo os professores catedráticos eram uma espécie de deuses, não deuses cristãos mas deuses gregos, olímpicos, que pairavam acima das nuvens e... da matéria! Então um assistente dele, o Eng. José Mariano Jervis Pereira, comentava "Se me dissessem que o Professor Silveira tinha estado a apertar estes parafusos e eu não tivesse visto como vi com os meus próprios olhos eu não teria acreditado!..."

O Professor A. da Silveira deslumbrava-se com a chamada "intuição científica" que reconhecia, com algum desvanecimento, possuir: "Alves Marques, eu escolhi estas substâncias para investigar antes de me ter apercebido destas vantagens que nos proporcionam agora no prosseguimento dos trabalhos!..."

António da Silveira prezava muito o convívio cultural com o Doutor António Sérgio mas a sua posição filosófica era diferente da dele. Quando, em 1976, se homenageou, na Academia das Ciências de Lisboa aquele filósofo (14), o Professor António da Silveira declarava "... um físico como este que vos fala, que passou pelo laboratório, que praticou o ilusionismo e a prestidigitação, não despega facilmente da Terra; e se aceita *subir* até ao universo de um idealismo inteligente – como o de António Sérgio – só o faz em balão cativo ..."

O Professor Silveira gostava de fazer aceitar a sua dinâmica na sociedade como uma dinâmica que estava de acordo com os Evangelhos. Apareceu então uma vez no laboratório a fazer uma citação do Evangelho de S. Lucas (15), cap. XII:

> "... 49 Eu vim trazer fogo à terra; e que quero eu, senão que ele se acenda?..." 51 Julgais que vim trazer paz à terra? Não, vos digo eu, mas separação; 52 porque, de hoje em diante, haverá numa casa cinco pessoas, divididas três contra duas, e duas contra três. 53 estarão divididos: o pai contra o filho, e o filho contra seu pai; a mãe contra a filha, e a filha contra a mãe; a sogra contra sua nora e a nora contra a sua sogra.
>
> ....."

Finalmente insisto sobre as suas intervenções no ensino da Física em Portugal:

Foi o Professor Silveira que apresentou a Teoria da Relatividade com o seu denso entrosamento na Física actual. Introduziu o ensino da Mecânica

Quântica, primeiro no Curso de Engenharia Química, depois à volta de 1960, no ensino da Física para todas as licenciaturas no Instituto Superior Técnico.

O Professor Silveira tinha uma veneração por Einstein que transparece em muitos dos seus escritos. Antes de transcrever um deles contarei um episódio: J. Cabannes no seu magnífico livro "La Diffusion Moléculaire de la Lumière" (16) refere a págs. 209 e seguintes um erro da teoria de Einstein sobre a difusão da luz pelos fluidos. Referi-me a esta passagem uma vez numa análise que eu tentara fazer do problema "Mais cuidado, mais cuidado nessas afirmações de que Einstein cometeu um erro!... Não tenho a certeza de que Cabannes tenha razão..." E o Professor Silveira tinha pela obra científica de J. Cabannes a maior consideração ... E passo a transcrever (17):

> "... A relatividade restrita não tinha dado que falar entre nós – que se saiba – tão pouco a teoria dos quanta ... – *et pour cause*. Mas, quando apareceram as primeiras obras didácticas, em francês, com farto cálculo tensorial e abundante geometria riemanniana, os matemáticos apropriaram-se da Relatividade nas barbas dos pobres físicos, deixando-os estupefactos, siderados. E sobreveio a mais curiosa mistificação de que há memória – com um inevitável *renouveau* daquele mito poliédrico que está na base do elitismo da nossa sociedade: – o mito da excelência em matemática... (É difícil libertarmo-nos de um mito com tais garras quando nele fomos embalados e dele nos vemos forçados a saborear os frutos...).

Naturalmente, não foi só cá que se verificou o fenómeno; mas, não se instalou cá um *plano de polarização?* – cá. onde não havia teóricos da física e das ciências aplicadas?

Aguardai que eu vos ajude a fazer um juízo de realidade.

Na impossibilidade de se fazer ciência, fizeram-se cursos – prática que havia de criar tradições... Professores tentaram reciclar licenciados e outros professores – em privado. – Matérias de física?. Não, bem entendido, mas já adivinhais de quê ...

Senhores do novo feudo, parece que lhes competia elucidar, catequizar os pobres físicos – começando naturalmente pela relatividade restrita. Mas como – não me direis?, se a relatividade restrita saíra da electrodinâmica e da óptica, e de electrodinâmica e de óptica eles não viam um iota? Nas cadeiras de física-matemática nunca figurava – nem podia figurar! – a Teoria electromagnética de Maxwell.

Enquanto estudante, nunca vi em português nem ouvi qualquer referência ao célebre artigo de Einstein de 1905: *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, com uma tradução francesa em 1921: *Sur l'Etectrodynamique des corps en mouvement.*

Ora, Einstein, assediado, acabou por escrever em 1917 um livrinho que, na tradução francesa de 1921, tinha por título: *La Théorie de la Relativité restreinte et généralisée (mise à la portée de tout le monde)*, e diz no prefácio:

> "Le but de ce petit livre est de permettre à ceux qu'intéresse la Relativité, aux points de vue scientifique et philosophique d'en acquérir une connaissance aussi exacte que possible, même s'ils ne possèdent pas l'appareil mathématique de la physique théorique. Sa lecture demande une certaine *maturité d'esprit* et, malgré le petit nombre de pages [de ce livre], exigera un certain *effort de patience et de volonté*. "A. *(Os* sublinhados e o parêntese são meus).

Sacro nome de Dionysos! – vulgarizar a Relatividade, socializar-lhes o *joli fief* ! Era preciso ter topete.

– É altamente matemática a Relatividade!; não se meta nisso ...

Foi o que me disse, em 1927, alguém que eu ainda supunha conhecer a electrodinâmica. E o livro foi apoiado de "fraquinho", indigno do seu autor – pobre Einstein! – Para cúmulo, aconselhou-me *Les axiomes de la Mécanique* de P. Painlevé...

Fascinados pela magia dos índices da análise tensorial, era pela relatividade geral que queriam começar e entrar na liça... – A relatividade restrita? – Um caso limite ... frioleira. Mas o próprio Einstein tinha advertido que a leitura de um livro sobre a relatividade geral

> "... exige au préalable une connaissance approfondie de la relativité restreinte." (No prefácio do livro de vulgarização citado. – Isto não se aplica ao Prof. Santos Lucas que, num esforço meritório, fez um curso: Teoria da relatividade, em 1922-23, de que ficaram "sebentas").

Em Março de 1922, Einstein ainda falou, no Collège de France, do conflito entre o princípio clássico de relatividade e a electrodinâmica. E, referindo-se aos matemáticos que tinham memorizado fórmulas, mas não tinham sido capazes de penetrar a essência da relatividade", disse (Ver a primeira edição em língua francesa da obra de B. Kouznetsov: *Einstein*, p. 214: Gérard et Cie., Verviers, 1967):

> "... leur erreur est de ne voir que des relations formelles sans s'arrêter pour considérer les réalités physiques qui correspondem aus symboles mathématiques."

Sabemos que Einstein depois de ter sentido – quando era muito jovem – uma certa atracção pelas matemáticas puras, acabou por se desinteressar do seu estudo em benefício da física; é ele que diz:

> "... Je montrais sans doute moins d'intérêt pour les mathématiques que pour les autres sciences exactes [...], je n'avais pas suffisamment d'intuition dans le domaine des mathématiques... Alors qu'en physique j'eus tôt appris à séparer du reste ce qui pouvait conduire au – grands principes..."

Depois disto, contrariando a crença ainda hoje espalhada de que o nosso homem era um matemático, que lhes posso "servir" meus senhores? O resto da história – não? Certamente, mas em resumo.

Einstein encontrou em H. Minkowski, seu antigo professor em Zurique, mas de cujas aulas desertara, um aliado de génio: foi Minkowski que, em 1907-8, já professor em Gotinga, introduziu o formalismo matemático quadridimensional da relatividade restrita.

Por um momento, Einstein mostrou-se céptico: receou que a "introdução de um formalismo complicado tornasse mais difícil a inteligência do conteúdo físico da teoria".

Foi nesta altura que o grande matemático. D. Hilbert disse (Ver a tradução francesa da obra de Ph. Frank: *Einstein, p.* 305, Albin Michel, Paris, 1968):

> "Dans les rues de notre Göttingen mathématique, le premier garçon venu comprend mieux la géometrie à quatre dimensions qu'Einstein. Et pourtant, mulgré cela, c'est Einstein qui a fait l'ouvrage, et non pas les mathématiciens."

Numa reunião de matemáticos disse ainda: "quereis saber porque, na vossa geração, foi Einstein que disse as coisas mais originais e mais profundas sobre o espaço e o tempo?"

> "Parce qu'il n'a rien appris de toute la philosophie et les mathématiques concernant le temps et l'espace."

Assim se falava em Gotinga mas, lá, na tradição de Gauss, Jacobi, Riemann... a excelência em matemática não era um mito alimentado pelos pontífices.

.....

O Professor Silveira incomodava-se que pensassem que ele não confiava nos seus colaboradores. Entre 1965 e 1970 veio do Ministério da Educação numa instrução para que os professores inspeccionassem as aulas dadas pelos seus assistentes. Só *"in extremis"* o fez e duma maneira formal e confessava, constrangido "Não tenho à vontade nenhuma para fazer isto!"

A respeito das aulas de exposição: "Quando se sabe bem um assunto não pode deixar de se sentir um grande prazer em o expor, com clareza, às outras pessoas!"

Nas reuniões dos seus assistentes o Professor Silveira recomendava com insistência a modéstia na linguagem. "Linguagem coloquial, linguagem simples que não possa intimidar, dalguma forma, os estudantes que estão nas aulas!"

Apesar da sua confessada e mais que evidente paixão pela investigação científica recomentava-nos "Nunca a preparação duma experiência ou a execução de cálculos interpretativos podem servir de pretexto para se faltar a uma aula curricular!"

Julgo que deve salientar-se que foi o Professor António da Silveira o orientador da tese que foi defendida nas primeiras provas de doutoramento que tiveram lugar no Instituto Superior Técnico.

Durante as provas declarou:

> "... (O candidato) foi um estudante assíduo, procurando cumprir, um estudante uniformemente bem classificado: um "bom estudante" como se diz entre nós.

Isto, entre nós, são geralmente "simples atributos", não cheguam a ser "virtudes". Estes atributos, entre nós, geralmente, pouco ou nada abonam em favor do que porventura possa haver de autêntico num indivíduo, como virtudes que o imponham acima do comum.

Não é uma simples impressão, é um juízo formado que poderia ser largamente exemplificado.

.....

Devo dizer que logo, logo, não o tomei muito a sério: e' que eu tenho uma certa experiência de um certo género de "meninos" em busca de qualquer coisa "de fino e de fácil", que querem fazer investigação – como dizem – mas que desistem a breve trecho, logo que se apercebem de que investigar se escreve com um V...

Não fiz, pois, grande caso; mas o candidato – voltou e tornou a voltar.

Começou a trabalhar no Centro de Estudos de Física da Faculdade de Ciências de Lisboa. Como tinha sido um bom estudante a sua iniciação devia ser acidentada. É que (o doutorando) tinha de começar por dar provas perante si próprio antes de as dar perante os outros. Como tinha sido um bom estudante – um "desalmado" – a sua iniciação devia ser tumultuosa, e foi.

E não deixou de haver, certamente, quem se empenhasse em duvidar de que ele chegasse um dia a fazer alguma coisa. A estes o nosso Engenheiro respondeu sempre, obstinadamente, com o silêncio – a um tempo a mais sensível e a mais sublime das respostas.

Enfim, passados uns dois anos estava a trabalhar com regularidade e muito convencido..."

O Professor António da Silveira era um proselito da doutrina que proclama a inactividade da instituição INFERNO, pelo menos dum inferno instituído com certos objectivos. Contava que o saudoso Padre Alves Correia fora uma vez interrogado por duas senhoras cujo passado, um pouco brejeiro, as fazia pensou no inferno com alguma inquietação. "Sim, muitas senhoras", dissera o Padre Alves Correia. "O inferno existe ... mas... não funciona!"

Como escreveu o evangelista S. João no final do seu testemunho (18) ocorria-me dizer agora:

"Muitas outras coisas há que fez e disse (o Professor Silveira), as quais se se escrevessem uma por uma, creio que nem no mundo todo poderiam caber os livros que seria preciso escrever."

Morreu em 1985, em Março, isolado de quase todos os estudiosos de Física do nosso País, a quem dedicou a sua vida.

REFERÊNCIAS

1. M. Alves Marques, Técnica, AEIST, Junho 1984, p. 7-15.
2. M. Alves Marques and M.I. de Barros Marques, Proc. Roy. Acad. Amsterdam 77, p. 286 (1974).
3. R. W. James, The Optical Principles of the Diffraction of X-rays, ed. G. Bell and Sons Ltd, London, 1962.
4. A. da Silveira, Teoria da Electricidade, ed. Instituto Nacional de Investigação Científica, Aveiro, 1985.
5. A. da Silveira, Comentários imperfeitos com elementos para uma história dos Estabelecimentos Científicos em Portugal, Memórias da Academia das Ciências de Lisboa, classe de Ciências, Tomo XXVI, p. 154 (1984).
6. A. da Silveira, Elogio Histórico de Luís António Rebelo da Silva, Memórias da Academia das Ciências de Lisboa, Classe de Ciências, Tomo XV, p. 48 (1971).
7. A. da Silveira, Comentários imperfeitos com elementos para uma história dos Estabelecimentos Científicos em Portugal, Memórias da Academia das Ciências de Lisboa, classe de Ciências, Tomo XXVI, p. 160 (1984).
8. Ibid., p. 158 (1984).
9. Ibid., p. 143/4 (1984).
10. Diário do Governo, I Série, n.º 300, p. 2336 (1966).
11. Jornal Português de Economia e Finanças, Ano XVII, n.º 201, p. 17 (1969).
12. A. da Silveira, Comentários imperfeitos com elementos para uma história dos Estabelecimentos Científicos em Portugal, Memórias da Academia das Ciências de Lisboa, classe de Ciências, Tomo XXVI, p. 169 (1984).
13. A. Gião, Raport sur la Recherche Scientifique Fondamentale au Portugal. Presenté au Comité Scientifique de l'OTAN, le 13 Octobre 1966.
14. A. da Silveira, Homenagem a António Sérgio, Academia das Ciências de Lisboa, Instituto de Altos Estudos, Lisboa, p. 35 (1976).
15. S. Lucas, Bíblia Sagrada, Novo Testamento, traduzido da vulgata e comentado pelo Pe. M. de Matos Soares, p. 162 (1946).
16. J. Cabannes, La Diffusion Moleculaire de la Lumière, ed. Les Presses Universitaires, Paris, p. 209 e seguintes (1929).
17. A. da Silveira, Resposta de António da Silveira a José Pinto Peixoto, Memórias da Academia das Ciências de Lisboa, Classe de Ciências, Tomo XXI, p. 16 (1979).
18. S. João, Bíblia Sagrada, Novo Testamento, traduzido da vulgata e comentado pelo Pe. M. de Matos Soares, p. 250 (1946).

TÉCNICA
Revista de Engenharia
Publicação trimestral
de investigação científica e desenvolvimento

UMA REVISTA DE ENGENHARIA

A Técnica, Revista de Engenharia, tal como a Associação dos Estudos do Instituto Superior Técnico, onde se integra, acompanha, desde os primeiros tempos, a vida do Instituto.

Das suas páginas constam artigos científicos e técnicos de flagrante actualidade quantas vezes pioneiros, entre nós, de ciência nova e de novas tecnologias.

A revista tem uma periodicidade de quatro números por ano e está estruturada em perfeita adequação à intensa actividade de investigação e desenvolvimento que hoje se processa no campus de Instituto Superior Técnico.

Compreende, assim artigos convidados, comunicações científicas originais e notícias sucintas e rigorosas sobre ciência, tecnologia e desenvolvimento.

Trata-se, pois, de uma revista científica de nível o que não impede a colaboração de estudantes desde que devidamente credenciados por investigadores qualificados e de reconhecido mérito.

Torne-se assinante da Técnica.

Para mais informações contacte-nos pelo telefone 351-1-848 10 18 / 841 73 62 ou fax 351-1-847 40 14 / 849 92 42
ou escreva-nos para: Técnica, Revista de Engenharia, Av. Rovisco Pais n.° 1, P-1098–Lisboa CODEX
Publicidade: DOSSIER – Comunicação e Imagem, Lda., R. Eça de Queirós, 18 - 2.° 1000 Lisboa
Telefs. (01) 355 92 94/5 - 353 73 21 – Fax/Telef. (01) 353 73 12

DIFERENCIÁLIS
Informática, Lda.

CONSULTADORIA

ESTUDOS DE INFORMATIZAÇÃO E ACTUALIZAÇÃO

SOFTWARE

INTERNACIONAL, GESTÃO, DESENVOLVIMENTO À MEDIDA

HARDWARE

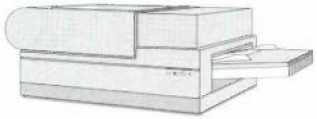
COMPUTADORES, IMPRESSORAS, SCANNERS, MULTIMÉDIA

CONSUMIVEIS

RATOS, TINTEIROS PARA JACTO DE TINTA, DISQUETES...

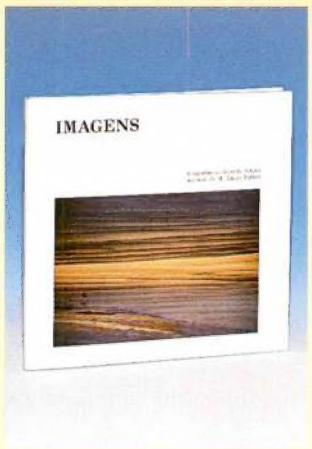
FORMAÇÃO

PRODUTOS MICROSOFT, LINGUAGENS DE PROGRAMAÇÃO

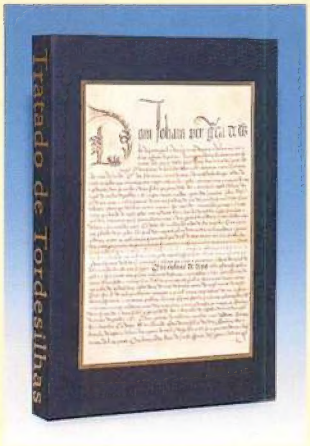


Rua de Entrecampos n.° 64 C - 1700 Lisboa
Telef.: 796 83 26 – Fax: 796 92 79

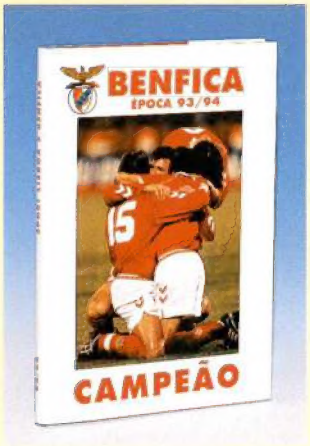
Castoliva editora, lda.



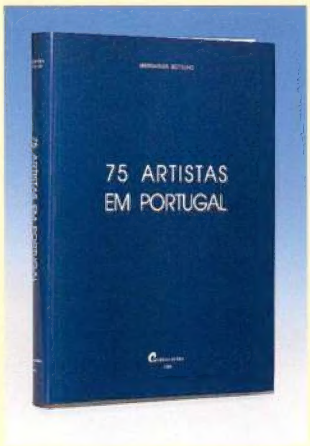
Título: **IMAGENS**
Autor: Orlando Batista (Fotografias)
M. Luísa Polleri (Poemas)
Formato: 31 × 29 cm
N.º de Páginas: 96
Encadernação: Capa cartonada com sobrecapa
***Esc.:* 6 500$00**



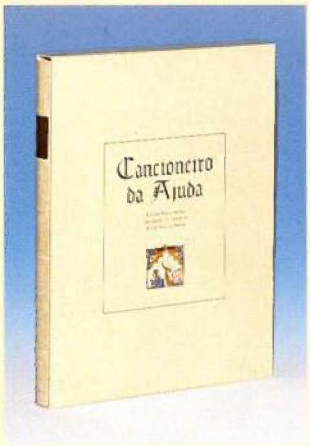
Título: **TRATADO DE TORDESILHAS**
Autor: Vasco Graça Moura, Luís Miguel Enciso Recio, Luís Adão da Fonseca, António Rumeu de Armas, Joaquim Veríssimo Serrão, Felipe Ruiz Martín
Formato: 22 × 30 cm
N.º de Páginas: 316 - 84 gravuras
Encadernação: Capa cartonada forrada a tecido
ISBN: 972-9157-30-8
***Esc.:* 24 150$00**



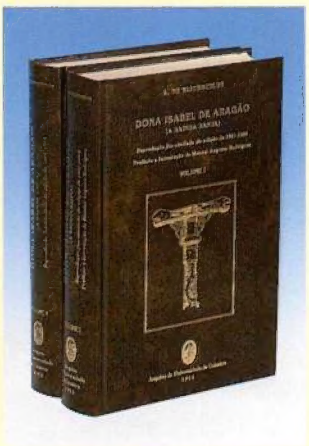
Título: **BENFICA CAMPEÃO**
Época 93/94
Autor: Rui Guedes
Formato: 22 × 31 cm
N.º de Páginas: 160
Encadernação: Capa cartonada com sobrecapa
ISBN: 972 - 9157 - 22 -7
***Esc.:* 5 000$00**



Título: **75 ARTISTAS EM PORTUGAL**
Autor: Margarida Botelho
Formato: 23 × 30 cm
N.º de Páginas: 312
Encadernação: Capa cartonada com sobrecapa
***Esc.:* 10 000$00**

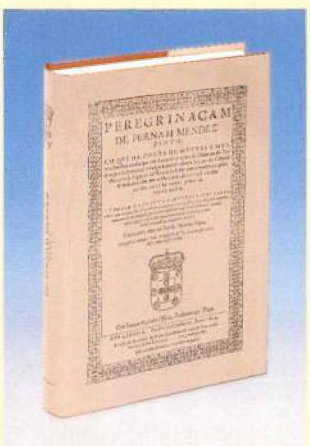


Título: **CANCIONEIRO DA AJUDA**
Edição Fac-similada do códice existente na Biblioteca da Ajuda
Formato: 35 × 45 cm
N.º de Páginas: 272
Encadernação: Capa cartonada e acondicionada num estojo
***Esc.:* 60 000$00**

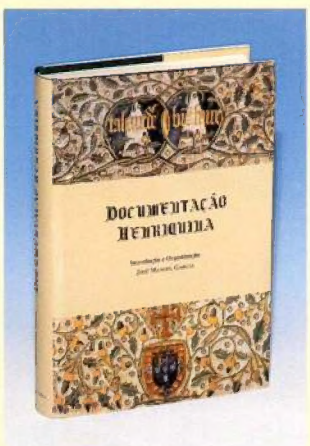


Título: **DONA ISABEL DE ARAGÃO (A Rainha Santa)**
Autor: A. De Vasconcelos
Formato: 16 × 23 cm
N.º de Páginas: Vol. I - 690; Vol. II - 644
Encadernação: Capa cartonada e acondicionada num estojo
ISBN: 972 - 9157 - 29 - 4
***Esc.:* 17 500$00**

Título: **INVENTÁRIO ARTÍSTICO DE PORTUGAL - Distrito de Beja**
Autor: Túlio Espanca
Formato: 23 × 29,5 cm
N.º de Páginas: Vol. I - 342; Vol. II - 523
Encadernação: Capa em cartolina
***Esc.:* 27 000$00**



Título: **PEREGRINAÇÃO**
Autor: Fernão Mendes Pinto
Formato: 20 × 28 cm
N.º de Páginas: 644
Encadernação: Capa cartonada com sobrecapa
ISBN: 972 - 9157 - 23 - 5
***Esc.:* 5 500$00**



Título: **DOCUMENTAÇÃO HENRIQUINA**
Introdução e Organização: José Manuel Garcia
Formato: 20 × 28 cm
N.º de Páginas: 684
Encadernação: Capa cartonada com sobrecapa
ISBN: 972 - 9157 - 32 - 4
***Esc.:* 8 000$00**

FAÇA JÁ A SUA ENCOMENDA PARA: PLACE YOUR ORDER NOW TO:

Rua Padre Luís Campos, 686 – Vermoim — Apartado 1006 – 4471 MAIACodex — PORTUGAL
Telef. (02) 9439710 – Fax (02) 9439719

GRÁFICA MAIADOURO, S.A.

qualidade

Apoiamo-nos numa equipa de profissionais qualificados com a adequada experiência e formação técnica.

Possuimos todo o equipamento necessário e amplas instalações que nos permite fazer grandes trabalhos em pouco tempo.

Livros e revistas, reproduções de obras de arte, catálogos, desdobráveis e cartazes, são a nossa actividade principal.

Estamos sempre na linha da frente das Artes Gráficas em Portugal, controlando todos os processos de produção com rigor e conhecimento dos grandes mestres.

A assinatura da Gráfica Maiadouro é a melhor garantia de um trabalho perfeito.

profissionais qualificados

formação técnica

equipamento necessario

fazer grandes trabalhos em pouco tempo

controlando todos os processos de produção

estamos sempre na linha da frente

SEDE
Rua Padre Luís Campos, 686 – VERMOIM – Ap. 1006 – 4471 MAIA Codex
Telef. (02) 943 97 10 • Fax: (02) 943 97 18

DELEGAÇÃO
Avenida Elias Garcia, 162 – 2.º Esq. – 1050 LISBOA
Telef. (01) 799 41 20 • Fax: (01) 796 92 79